תרגול 9:

קשירות, דרגה וקוטר של גרפים:

מושגים:

- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. הדרגה של קדקוד $v\in V$ היא מספר הצלעות החלות ב – v, והיא תסומן ע"י $degree(v)$ או $deg(v)$.

משפט הדרגות: בגרף $G=(V,E)$ לא מכוון מתקיים כי $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.

- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. סדרה של קודקודים $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ כאשר $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ לכל $1\le i\le p-1$ נקראת טיול. אם הצלעות $\{v_i,v_{i+1}\}$ כולן שונות זו מזו,נאמר שזהו מסלול (או מסילה). אם כל הקדקודים לאורך המסלול שונים זה מזה אז המסלול פשוט.

  אם $v_0=v_p$ אזי המסלול נקרא מעגל. אם כל הקדקודים לאורך המעגל שונים זה מזה, אז זהו מעגל פשוט.

  אורך המסלול $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ שווה ל - p, ז"א למספר הצלעות שלאורכו.

  יהיו $u,v\in V$ שני קודקודים. המרחק בין u ל – v מוגדר כאורך המזערי של המסלול ביניהם ומסומן ע"י $d(u,v)$. אם אין מסלול בין u ל – v אז מגדירים $d(u,v)=\infty$. קוטר הוא המרחק המקסימלי בגרף בין זוג קדקודים כלשהם.

- גרף לא מכוון נקרא קשיר אם יש מסלול בין כל זוג קדקודים. גרף מכוון נקרא קשיר היטב (או קשיר חזק) אם לכל שני קדקודים $a,b\in V$ יש מסלול מ – a ל – b ומסלול מ – b ל – a.
- נאמר שגרף $G'=(V',E')$ הוא תת-גרף של G אם $V'\subseteq V$ ו – $E'\subseteq E$ וכן לכל צלע $\{u,v\}\in E'$ מתקיים כי $u,v\in V'$.
- יהי $G=(V,E)$ גרף. הגרף המשלים של G הוא הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$, כאשר קבוצת הקודקודים של $\bar{G}$ זהה לזו של G, ואילו שני קודקודים u,v יהיו שכנים ב - $\bar{G}$ אם ורק אם אינם שכנים ב – G.

תרגילים:

1. נניח כי $G=(V,E)$ גרף המקיים $|V|=n$ ו - $|E|>\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. הוכיחו כי G קשיר.

פתרון 1:

נניח בשלילה כי G אינו קשיר. בתרגיל הבית יוכח שזה גורר את קשירות $\bar{G}$. כעת אם $|E|>\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ אזי

$$|\bar{E}|<\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{2(n-1)}{2}=n-1$$

(המספר המקסימלי האפשרי של צלעות בגרף על n קדקודים הוא $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$)

וראינו בהרצאה שגרף קשיר מינימלי על n קדקודים מכיל $n-1$ צלעות.

פתרון 2:

נניח בשלילה כי G אינו קשיר, אז ל – G לפחות שני רכיבי קשירות.
נסמן ב $G_1 = (V_1, E_1)$ את אחד מרכיבי הקשירות וב- $G_2 = (V_2 = V \backslash V_1, E_2 = E \backslash E_1)$ את תת הגרף המכיל את יתר הקדקודים והצלעות שביניהם. נסמן $k = |V_1|$, לכן $|V_2| = n - k$. מכאן ש - $|E_1| \leq \binom{k}{2}$ וגם $|E_2| \leq \binom{n-k}{2}$ (המספר המקסימלי של צלעות בגרף על m קדקודים הוא $\binom{m}{2}$), ולכן

$$|E| = |E_1| + |E_2| \leq \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{k^2-k+n^2-nk-nk+k^2-n+k}{2} = k^2 - nk + \frac{n^2-n}{2}$$

זהו פולינום במשתנה k והפונקציה מקבלת ערך מקסימאלי בקצוות, כלומר ב – $k = 1$ ו – $k = n - 1$. לכן מתקיים $|E| \leq \max_{1 \leq k \leq n-1} \left\{ \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} \right\} = \binom{n-1}{2}$, ולכן $|E| \leq \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, בסתירה לנתון.

2. יהי G גרף פשוט, נסמן ב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף. נניח כי $\delta(G) > 1$.
א. הוכיחו כי יש ב – G מסלול פשוט באורך $\delta(G)$ לפחות.
ב. הוכיחו כי יש ב – G מעגל פשוט באורך $\delta(G) + 1$ לפחות.

<u>פתרון:</u>
א. יהי $u_0, u_1, \dots, u_k$ מסלול פשוט ארוך ביותר ב – G. כל שכניו של u_0 שייכים בהכרח למסלול, אחרת ניתן להאריך אותו, ואם כן $\delta(G) \leq k$ כנדרש.
ב. באותו המסלול שבסעיף א', יהיו $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ כאשר $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$ שכניו של u_0. אזי $u_0, u_1, \dots, u_{i_r}, u_0$ הוא מעגל פשוט בגרף באורך $i_r + 1 \geq r + 1 \geq \delta(G) + 1$.

3. מהו הקוטר המרבי של גרף קשיר עם n קדקודים?
<u>פתרון:</u>
$n - 1$. למשל גרף המסלול.

4. יהי G גרף לא מכוון עם n קדקודים שבו דרגת כל קדקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכיחו כי G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

<u>פתרון 1</u>:

נניח בשלילה כי קוטר הגרף הוא לפחות 3, ז"א קיימים שני קדקודים כך שהמרחק ביניהם הוא לפחות 3, נסמן קדקודים אלו ב – u,v. נסמן את שכני u ב – $N(u)$ ואת שכני v ב – $N(v)$, נשים לב כי $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, כי אחרת המרחק המינימאלי בין u ל – v היה 2. מהנתון בשאלה $|N(u)| \geq \frac{n-1}{2}$ וכן $|N(v)| \geq \frac{n-1}{2}$, לכן

$|N(u)| + |N(v)| \geq n-1$, מה שאינו ייתכן, כי אז נקבל ש –

$|V| \geq |N(u)| + |N(v)| + |\{u,v\}| = n-1+2 = n+1$.

<u>פתרון 2</u>:

נתבונן בשני קדקודים כלשהם בגרף, u,v. כל צלע של הגרף שבה משתתף u או v תהיה יונה וכל קדקוד בגרף מלבד u,v יהיה שובך.

לכן ישנן $\frac{n-1}{2} * 2 = n-1$ יונים.

יונה תוכנס לשובך אא"ם הקדקוד המייצג את השובך שייך לצלע המיוצגת על ידי היונה.

כעת, אם ישנה יונה שלא מוכנסת לאף שובך המסקנה תהיה שיש צלע בין u לv וסיימנו.

אחרת כל יונה מוכנסת לשובך כלשהו, ישנן $n-1$ יונים ו$n-2$ שובכים ולכן קיים שובך אליו הוכנסו לפחות שתי יונים.

לכן יש מסלול באורך שתיים בין u לv העובר דרך הקדקוד המיוצג על ידי אותו השובך וסיימנו.

עצים:

הגדרות:

גרף לא מכוון קשיר וחסר מעגלים נקרא עץ.

תת גרף פורש של G הוא תת גרף שמכיל את כל קדקודי G. עץ פורש ב G הוא תת גרף פורש שהוא עץ.

משפט: גרף קשיר עם n קדקודים ו$(n-1)$ צלעות הוא עץ.

תרגילים:

1. נתון גרף קשיר $G = (V,E)$. יש להוכיח כי קיים קדקוד $v \in V$ כך שהגרף $G' = G \backslash \{v\}$ הינו גרף קשיר.

<u>פתרון:</u>

טענת עזר: בכל עץ שבו לפחות שני קדקודים יש לפחות שני עלים.

הוכחה:

ניתן להתחיל מקדקוד כלשהו ולטייל בכיוון שרירותי כלשהו כך שלא חוזרים מידית על צלע שביקרנו בה, כיוון שאין מעגלים נגיע בסופו של דבר לעלה.

אם נתחיל מהעלה נגיע בסופו של דבר לעלה אחר ולכן יש לפחות שניים, מש"ל.

הוכחת טענה עיקרית:

כיוון שהגרף G קשיר, הוא מכיל עץ פורש,

לפי טענת העזר, בכל עץ פורש עם לפחות שני קדקודים, יש לפחות שני עלים. לכן, אם ננתק את אחד העלים, הגרף שנותר יוותר קשיר כיוון שקיים מסלול בין כל זוג קדקודים שנותרו העובר דרך העץ הפורש.

2. נתון שבעץ מסוים T ,ישנם שני מסלולים ארוכים ביותר בעלי אורך שווה, נסמנם P_1, P_2 . צריך להוכיח שהמסלולים P_1, P_2 אינם זרים בקדקודים כלומר שיש להם קדקוד משותף אחד לפחות.

<u>פתרון:</u>

נתבונן בזוג הקדקודים, אחד מ P_1 והשני מP_2, כך שהמרחק בניהם בT הינו הקצר ביותר, נסמנם- u, v. אזי אם נסמן B להיות החלק הארוך של P_1 המתחיל בקצה המסלול ומסתיים בu (או חצי מהמסילה אם שני החלקים באורך שווה), וכן C להיות החלק הארוך מP_2 , וכן D להיות המסלול בין v ל u,

אזי המסלול BDC יהיה בהכרח ארוך יותר מכ"א מהמסלולים P_1 ו P_2 כיוון שמכיל שני חלקים מכ"א מהם שארכם לפחות חצי, וכן לפחות צלע נוספת מD בסתירה לכך שP_1, P_2 הינם המסלולים הארוכים ביותר בעץ, מש"ל.

3. יהי $T = (V, E)$ עץ שבו n קדקודים,

א. הוכיחו שלכל זוג קדקודים $\{u, v\} \notin E$, בגרף $G = (V, \{u, v\} \cup E)$ יש מעגל פשוט יחיד.

ב. הוכיחו שלכל צלע $\{u, v\} \in E$, בגרף $G = (V, E \backslash \{u, v\})$ יש בדיוק שני רכיבי קשירות.

<u>פתרון:</u>

א. נבחין תחילה שלא קיים בגרף המתקבל מעגל שאינו פשוט כיוון שאז גם לאחר הסרת $\{u, v\}$ הגרף T איננו עץ בסתירה לנתון בשאלה.

מקשירות העץ נובע שקיים בעץ מסלול בין u ו v. כעת, לאחר הוספת הצלע נוצר מעגל פשוט, נסמן אותו C_1.

אם קיים בגרף G מעגל פשוט נוסף, C_2 , $\{u, v\}$ חייבת להשתתף בו, כיוון שבעץ המקורי T אין מעגלים.

לכן אם נזרוק את $\{u, v\}$, יהיו בעץ שני מסלולים שונים זה מזה בין u ו v, כלומר יש בעץ מעגל וזה סותר את הגדרתו כעץ.

ב. הצלע $\{u, v\}$ הינה המסלול הפשוט היחיד בין u ו v בעץ. אם היה עוד אחד, לפי הגדרה T לא היה עץ. לכן כשמסירים אותה, ב- G לפחות שני רכיבי קשירות.

נבחין שלא יתכן שיש ב G יותר משני רכיבי קשירות כיוון שבהוספת$\{u, v\}$ ניתן לחבר לכל היותר שני רכיבים כאלה ומצד שני $T = G \cup \{u, v\}$ כלומר יחד עם $\{u, v\}$ יתקבל עץ שהינו גרף קשיר.

4. יהיו $T_1 = (V, E_1), T_2 = (V, E_2)$ עצים מעל קבוצת קדקודים V, צריך להוכיח כי לכל צלע $e_1 \in E_1$ קיימת צלע $e_2 \in E_2$ כך שהגרפים- $G_1 = (V, (E_1 \backslash \{e_1\}) \cup \{e_2\})$ וכן $G_2 = (V, (E_2 \backslash \{e_2\}) \cup \{e_1\})$ הינם עצים.

<u>פתרון:</u>

תהי $e_1 \in E_1$

מקרה 1- $e_1 \in E_2$:

במקרה זה ברור כי אם נבחר $e_2 = e_1$ אזי $G_1 = (V, (E_1 \backslash \{e_1\}) \cup \{e_1\})$ וכן $G_2 = (V, (E_2 \backslash \{e_1\}) \cup \{e_1\})$ הינם עצים.

מקרה 2 - $e_1 \notin E_2$:

נסמן $e_1 = (u, v)$, בגרף $G' = (V, E_1 \backslash \{e_1\})$ יש בדיוק שני רכיבי קשירות, נסמנם $V_u,\ V_v$.

ב T_2 יש מסלול פשוט בין v ו u שאינו מכיל את e_1, נסמנו p.

כיוון ש p מתחיל בקדקוד מ V_u ומסתיים בקדקוד מ V_v, יש בו צלע e' המחברת בין V_u ל V_v.

נבחין ש $e' \notin E_1 \backslash \{e_1\}$ כיוון שלאחר הסרת $\{e_1\}$ אין מסלול בעץ בין שני רכיבי הקשירות שפורק אליהם.

לכן נסמן $e_2 = e'$ ונקבל ש $G_1 = (V, (E_1 \backslash \{e_1\}) \cup \{e_2\})$ קשיר, וכיוון שמספר הצלעות בו $n-1$ הוא גם עץ כנדרש.

ב$G'' = (V, E_2 \cup \{e_1\})$ יש מעגל פשוט יחיד המכיל את הצלעות e_2 וe_1

(מה שנובע מכך שב T_2 היה מסלול יחיד בין v ל u לפני הוספת e_1) כיוון שב $G_2 = (V, (E_2 \backslash \{e_2\}) \cup \{e_1\})$ יש $n-1$ צלעות ולא נותרו מעגלים, מתקבל שגם G_2 הינו עץ כנדרש.

גרפים דו-חלקיים:

1. **הגדרה:** גרף הקובייה Q_n הוא הגרף שקדקודיו הם כל הסדרות הבינאריות באורך n, ובין שני קדקודים
   יש צלע אם הסדרות הבינאריות שהם מייצגים נפרדות בביט יחיד.
   צ"ל שגרף הקובייה Q_n דו חלקי.
   פתרון: נגדיר:
   L = כל הקדקודים המייצגים סדרה עם מספר זוגי של אפסים.
   R = כל הקדקודים המייצגים סדרה עם מספר אי זוגי של אפסים.
   כל קדקוד מייצג סדרה בינארית עם מספר זוגי או אי זוגי של אפסים, לכן $L \cup R = V(Q_n)$, וכן
   $L \cap R = \emptyset$. נראה שאין צלעות בגרף בתוך L או בתוך R.
   יהיו $u, v \in V(Q_n)$. אם $\{u, v\} \in E(Q_n)$, אז הסדרות המיוצגות ע"י u, v נפרדות בביט אחד בדיוק. לכן באחת הסדרות בהכרח מס' אי זוגי של אפסים ובשנייה מס' זוגי, ולכן אחד הקדקודים נמצא ב – R, והשני ב - L.