# דף נוסחאות:

1) **חוק הסכום**: $n+m$ לתוצאה של אחד מהארועים

**חוק הכפל**: $n\cdot m$ לתוצאה של 2 ארועים בלתי תלויים

2) בחירת $k$ עצמים מתוך $n$: יש חשיבות לסדר (חליפות): $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$

אין חשיבות לסדר (צרופים): $C(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

3) חלוקה של $n$ עצמים לתתי קבוצות של $q_1, q_2 \dots q_k$ עצמים $n=\sum_{i=1}^{k} q_i$

$\frac{n!}{q_1!\,q_2!\cdots q_n!}$ (כאשר סדר תת הקבוצות חשוב)

4) חליפות עם חזרות: $n^k$.

5) יש $n$ סוגי אלמנטים, בוחרים $k$ (צרופים עם חזרות)

במילים אחרות: פיזור $k$ עצמים זהים ל-$n$ תאים שונים:

$$D(n,k)=\binom{n-1+k}{k}=\binom{n-1+k}{n-1}=\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!}$$ (צרופים עם חזרות)

אם בכל תא לפחות אלמנט אחד $\binom{k-1}{n-1}$

6) **מקדמים בינומיים**:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\dots+\binom{n}{n}x^ny^0$$

**זהויות**:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0\ ;\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n\ ;\ \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\ ;\ \binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\ ;\ \binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\dots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$$ (הוכחה בשיטה צירופית)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{t+k}{t}=\binom{t+n+1}{t+1}$$ שווה (סימטרי) ל: $$\sum_{k=0}^{n}\binom{t+k}{k}=\binom{t+n+1}{n}$$

**קירוב סטירלינג**:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

7. הכלה והפרדה: $\overline{X}=X'$

$$w(P_1'P_2'\ldots P_t') = n - [w(P_1)+w(P_2)+\ldots+w(P_t)]$$
$$+ [w(P_1P_2)+w(P_1P_3)+\ldots+w(P_{t-1}P_t)]$$
$$- [w(P_1P_2P_3)+w(P_1P_2P_4)+\ldots+w(P_{t-2}P_{t-1}P_t)]$$
$$+ \ldots$$
$$+ (-1)^t w(P_1P_2\ldots P_t)$$

$$w(P_1\cup P_2\cup P_3\cup\ldots\cup P_t) = [w(P_1)+w(P_2)+\ldots+w(P_t)]$$
$$- [w(P_1P_2)+w(P_1P_3)+\ldots+w(P_{t-1}P_t)]$$
$$+ \ldots$$
$$+(-1)^{n-1} w(P_1P_2\ldots P_t)$$

הערה: מספר הצרופים של $k$ מ-$N$ $P_1\ldots P_n$ ← $\binom{n}{k}$.

הפרת סדר

מספר תמורות של $n$ אלמנטים כך שאף אלמנט $i$, לא נמצא במקום ה-$i$.

$$D(n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!}\approx\frac{n!}{e}\approx 0.37\cdot n!$$

8. מספרים שלמים:

1. לכל $a, b$ קיימים $n,m$: $ma+nb=\gcd(a,b)$
2. לכל $a$ קיים פירוק לראשוניים: $a=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r}$

| Rule of Inference | Related Logical Implication | Name of Rule |
|---|---|---|
| 1) $p$<br>$\underline{p \to q}$<br>$\therefore q$ | $[p \wedge (p \to q)] \to q$ | Rule of Detachment (Modus Ponens) |
| 2) $p \to q$<br>$\underline{q \to r}$<br>$\therefore p \to r$ | $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ | Law of the Syllogism |
| 3) $p \to q$<br>$\underline{\neg q}$<br>$\therefore \neg p$ | $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ | Modus Tollens |
| 4) $p$<br>$\underline{q}$<br>$\therefore p \wedge q$ | | Rule of Conjunction |
| 5) $p \vee q$<br>$\underline{\neg p}$<br>$\therefore q$ | $[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$ | Rule of Disjunctive Syllogism |
| 6) $\underline{\neg p \to F_0}$<br>$\therefore p$ | $(\neg p \to F_0) \to p$ | Rule of Contradiction |
| 7) $\underline{p \wedge q}$<br>$\therefore p$ | $(p \wedge q) \to p$ | Rule of Conjunctive Simplification |
| 8) $\underline{p}$<br>$\therefore p \vee q$ | $p \to p \vee q$ | Rule of Disjunctive Amplification |
| 9) $p \wedge q$<br>$\underline{p \to (q \to r)}$<br>$\therefore r$ | $[(p \wedge q) \wedge [p \to (q \to r)]] \to r$ | Rule of Conditional Proof |
| 10) $p \to r$<br>$\underline{q \to r}$<br>$\therefore (p \vee q) \to r$ | $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$ | Rule for Proof by Cases |
| 11) $p \to q$<br>$r \to s$<br>$\underline{p \vee r}$<br>$\therefore q \vee s$ | $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)] \to (q \vee s)$ | Rule of the Constructive Dilemma |
| 12) $p \to q$<br>$r \to s$<br>$\underline{\neg q \vee \neg s}$<br>$\therefore \neg p \vee \neg r$ | $[(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \to (\neg p \vee \neg r)$ | Rule of the Destructive Dilemma |

1) Suppose that the compound statement $P$ is a tautology. If $p$ is a *primitive* statement that appears in $P$ and we replace *each* occurrence of $p$ by the *same* statement $q$. then the resulting compound statement $P_1$ is also a tautology.
2) Let $P$ be a compound statement where $p$ is an arbitrary statement that appears in $P$, and let $q$ be a statement such that $q \Leftrightarrow p$. Suppose that in $P$ we replace one or more occurrences of $p$ by $q$. Then this replacement yields the compound statement $P_1$. Under these circumstances $P_1 \Leftrightarrow P$.

## The Laws of Logic

For any primitive statements $p$, $q$, $r$, any tautology $T_0$, and any contradiction $F_0$,

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ | Law of *Double Negation* |
| 2) | $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$<br>$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ | *DeMorgan's* Laws |
| 3) | $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$<br>$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ | *Commutative* Laws |
| 4) | $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$<br>$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ | *Associative* Laws |
| 5) | $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | *Distributive* Laws |
| 6) | $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge p \Leftrightarrow p$ | *Idempotent* Laws |
| 7) | $p \vee F_0 \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$ | *Identity* Laws |
| 8) | $p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$<br>$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$ | *Inverse* Laws |
| 9) | $p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$<br>$p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$ | *Domination* Laws |
| 10) | $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ | *Absorption* Laws |

$\therefore p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$[p \to (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$

## The Laws of Set Theory

For any sets $A$, $B$, and $C$ taken from a universe $\mathcal{U}$

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\overline{\overline{A}} = A$ | Law of *Double Complement* |
| 2) | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | *DeMorgan's* Laws |
| 3) | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ | *Commutative* Laws |
| 4) | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | *Associative* Laws |
| 5) | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | *Distributive* Laws |
| 6) | $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ | *Idempotent* Laws |
| 7) | $A \cup \emptyset = A$<br>$A \cap \mathcal{U} = A$ | *Identity* Laws |
| 8) | $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$<br>$A \cap \overline{A} = \emptyset$ | *Inverse* Laws |
| 9) | $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$<br>$A \cap \emptyset = \emptyset$ | *Domination* Laws |
| 10) | $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ | *Absorption* Laws |