7.5.91.

מתמטיקה דיסקרטית

הרצאות מר [illegible]

קומבינטוריקה

~~[illegible]~~

צירופים, חליפות ותמורות

נתונים n איברים. .

חליפה (r-permutation) (וריאציה) בת r אלמנטים מתוך n האלמנטים הנתונים, $r \le n$, היא קבוצה בת r אלמנטים מתוך ה-n,

המסודרים בצורה מסוימת [illegible] 1-1 [illegible]

2 אספקטים של בחירה:

בחירת r אלמנטים מתוך n

בחירת הסדר בין ה-r שנבחרו.

סימון: $P(n,r)$ - מספר החליפות השונות של r אלמנטים מתוך n האלמנטים.

דוגמא: נתונים 3 אלמנטים: a,b,c

$P(3,1)=3$ בחירת אלמנט אחד מתוך ה-3. אין סדרים שונים בין הבחירות

בחירה 1: a
בחירה 2: b
בחירה 3: c

$P(3,2)=6$ בחירת 2 מתוך 3: וסדר

a,b	ab ba
b,c	bc cb
a,c	ac ca

$P(3,3)=6$ אין בחירה. סדר בין 3: abc acb bac bca cab cba r - combination

<u>צירוף</u> (קומבינציה) בן r אלמנטים מתוך m אלמנטים נתונים, $r \le m$, הוא קבוצה של r אלמנטים מתוך ה-m.

<u>סימון</u>: $\binom{m}{r}$ או $C(m,r)$ או C^r_m לסמן <u>מספר הצירופים</u> השונים של r אלמנטים מתוך m האלמנטים.

יש פה רק <u>בחירה</u> אלמנטים, בלי סדר.

$C(3,1)=3$	בחירה 1 מתוך 3		$\{a\}\ \{b\}\ \{c\}$
$C(3,2)=3$	2	3	$\{a,b\}\ \{b,c\}\ \{a,c\}$
$C(3,3)=1$	3	3	

לפני הצגת נוסחאות כלליות ל- $P(m,r)$ ו- $C(m,r)$
נציג 2 עקרונות כלליים לספירה: חוק המכפלה וחוק הסכום.

<u>דוגמא 1:</u>
נתונים מטבע וקוביה אחת.

<u>בעיה א'</u>: מה מספר התוצאות האפשריות אם מטילים את המטבע והקוביה?

$$2 \cdot 6 = 12$$

<u>בעיה ב'</u>: מה מספר התוצאות האפשריות אם מטילים המטבע <u>או</u> הקוביה?

$$2 + 6 = 8$$

חוק המכפלה:

אם לניסוי מסוים יש m תוצאות אפשריות ולניסוי אחר n תוצאות אפשריות אז לשניהם ביחד יש m·n תוצאות אפשריות.

[לכל תוצאה של אחד יש n תוצאות של השני. יש m פעמים.]

לדבר קרוב: באיור וזה [illegible]

חוק הסכום:

אם לניסוי מסוים יש m תוצאות אפשריות ולניסוי אחר יש n תוצאות אפשריות אז יש m+n תוצאות אפשריות רק שבסוף אחד מהם יקרה.

(A∩B) כאשר הקבוצות זרות

דוגמה:

בכמה אופנים ניתן לבחור 2 אנשים בעלי לאום שונה מקבוצה של 6 אנגלים, 10 צרפתים, 3 איטלקים?

יש לבדוק את המקרים הבאים:

נבחר אנגלי + צרפתי	6·10	} חוק המכפלה
צרפתי + איטלקי	10·3	}
אנגלי + איטלקי	6·3	}

יש לסכם את התוצאות האפשריות של שלושת המקרים.

נוסחה כללית למספר חליפות של k איברים מתוך n (בחירה+סדור)

$P(n,k)$:

יש לבחור מי יהיה על התפקיד הראשון n

השני $n-1$

$\vdots$

ה-k $n-k+1$

[illegible]

לפי חוק המכפלה: מספר האפשרויות לסדר 2 איברים : $n\cdot(n-1)$

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

סימון: $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

הגדרה: $0! = 1$

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

חליפה שבה $k=n$ נקראת תמורה

חליפה: סדור + בחירה

תמורה: סדור בלבד | ללא בחירה.

צירוף: בחירה.

מספר הצירופים של r מתוך n :

הסבר 1 :

מושג : בחירת קבוצה לא סדורה מתוך n.

עפ"י חוק המכפלה : יש לנו מושג של בחירה ומושג של סדור שקורים ביחד. לכן כל בחירה + סדור = כל בחירה × כל סדורים

בחירת r מתוך n.

סדור r

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r)$$

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

הסבר 2 :

~~תמורות~~ לסדור חליפות. החליפה מתחשבת בסדר.

אם מעוניינים בצירופים, יש לבטל את החזרות שנובעות מהסדר.

לכל בחירה, ~~...~~ של r איברים, ספרנו $r!$ סדורים שונים.

מבחינת צירופים, ספרנו כל צרוף $r!$ פעמים ולכן.

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

~~...~~

השיטה :

ספרנו מושגים. מסתבר שספרנו כל מושג יותר מדי.

תשובה : אם כל מושג נספר אותו מספר של פעמים k, ניתן לחלק את מספר המושגים שספרנו ב- k.

אם כל מושג נספר מס' פעמים שונה, אסור לחלק.

דוגמא: סדור 10 אנשים בשורה $10!$

סדור 10 אנשים במעגל $\frac{10!}{10} = 9!$

מפני ש~~[illegible]~~ סבוב במקום מעגלים.

בהפיכת שורה למעגל, 10 שורות שונות יהפכו לאותו מעגל.

מפני שאחר אחד $\underbrace{\text{צריך לחלק}}_{\text{(באופן שווה)}}$.

דוגמא: בכמה אופנים ניתן לסדר 8 צריחים על לוח שחמט באופן שהם לא יתקפו זה את זה?

(א) כשהם זהים: $8!$

אסור ששניים יהיו באותה שורה או באותה עמודה.

לכל שורה נותנים באיזה עמודה נשים צריח.

שורה 1: 8 אפשרויות לבחור.

2: 7 ״

⋮

(ב) כשהצריחים בצבעים שונים

יש לכפול הכבר את "הלוח" בשורה ראשונה או שניה.

לכל סדור מא' יש סדור של צבעים:

$8! \cdot 8! = (8!)^2$

תמורות עם חזרות:

נתונים g_1 אלמנטים מסוג ראשון, g_2 אלמנטים מסוג שני, ...

g_t אלמנטים מסוג t כך ש- $g_1+g_2+\dots+g_t=n$.

מספר התמורות (סידור) של n האלמנטים הללו:

הסבר 1: אם כולם שונים זה מזה (הדיוק) יש $n!$ אפשרויות.

אך אי אפשר להבדיל בין g_1 האלמנטים מסוג 1. לכן תמורות

שנבדלות רק בסדר האלמנטים מסוג ראשון הן זהות

מבחינתנו. יש $g_1!$ אפשרויות לסדר את האלמנטים הזהים

מסוג 1 בתוך התמורה. לכן כל סדור-עם-חזרות נספר $g_1!$

פעמים: $\frac{n!}{g_1!}$ זהו מספר הסדורים השונים שלוקחים חזרות מסוג ראשון

בדומה עבור סוגים אחרים ולבסוף:

$$\frac{n!}{g_1!\cdots g_t!}$$

הסבר 2:

תמורה דומה לסדור בשורה באורך n.

נבחר איפה בשורה יהיו אברים מסוג 1: $\binom{n}{g_1}$

2: $\binom{n-g_1}{g_2}$

$\vdots$

$$\binom{n}{g_1}\binom{n-g_1}{g_2}\cdots\binom{n-g_1-\dots-g_{t-1}}{g_t} = \frac{n!}{(n-g_1)!\,g_1!}\cdot\frac{(n-g_1)!}{(n-g_1-g_2)!\,g_2!}\cdot\frac{(n-g_1-g_2)!}{\quad}\cdots$$

דוגמה: מספר האפשרויות לסדר בשורה 2 כדורים אדומים, 4 צהובים, 6 כחולים:

לפי הנוסחה
או לפי הבינום לבד

$$\frac{12!}{2!\,4!\,6!}$$

תמורות עם חזרות בלתי מוגבלות (הליכה עם חזרה)

נתונים m אלמנטים.

בוחרים k אלמנטים מתוך m, עם חשיבות לסדר הבחירה, וניתן לבחור אלמנט מסוים מספר כלשהו של פעמים.

k יכול להיות גדול מ-m.

מספר האפשרויות: m^k.

דוגמאות שאלה 1

(א) בטופס טוטו 14 משחקים. יש לבחור בין נצחון קבוצה ראשונה, נצחון שניה, תיקו.
מספר האפשרויות השונות למילוי הטופס: 3^{14}.

(ב) - מהו מספר המספרים בין 4 ספרות (בין 0000 ל-9999, מותר לאפס מוב.) שאינם מכילים את הספרה 3?
בכל ספרה אפשר לשים אחת מ-9 אפשרויות $0,1,2,4,\dots 9$
9^4.
- אם אסור להתחיל במספר 0: (מספרים בין 1000 ל-9999)
$8\cdot 9^3$

(ט')

ד) להוכיח: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

הוכחה טכנית: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

הוכחה קומבינטורית:

כל בחירה של k אלמנטים מתוך n בוחרת את $n-k$ מתוך n (הנותרים). לכן מספר הבחירות של k מתוך n שווה למספר הבחירות של $n-k$ מתוך n.

ה) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

הוכחה א': טכני

הוכחה ב': לבחור $k+1$ מתוך $n+1$ זה כמו להחליט עבור אלמנט מסוים אם הוא נבחר או לא.

אם נבחר - יש צורך לבחור k מתוך n הנותרים.

אם לא נבחר - יש לבחור $k+1$ מתוך ה-n הנותרים.

יקרה בדיוק אחד מהם ולכן נחבר

(ה) בכמה אופנים ניתן לחלק כיתה של 30 סטודנטים לקבוצות של:

(1) 20 ו- 10 : $\binom{30}{20}$ יתר ה-10 נבחרים מתוך
זו בחירת ה-20.

(2) 4, 6, 20 : $\binom{30}{20}\binom{10}{6}$

(3) 20, 5, 5 : $\frac{1}{2!}\binom{30}{20}\binom{10}{5}$

כל ~~חלו~~ חלוקה נבחרה פעמיים. פעם כאשר חמישה מסוימת
נבחרה ופעם כאשר נבחרה החמישה המשלימה שלה.

(4) 10, 10, 10 : $\frac{1}{3!}\binom{30}{10}\binom{20}{10}$

וכל חלוקה לקבוצות של 10 נבחרה כאשר הקבוצות
~~נב~~ נבחרו בסדר שונה. 3! אפשרויות לבחור אותן בסדרים שונים,
כמו בסעיף הקודם.

(5) 5 5 5 5 2 2 2 2 2

(ו) $\frac{1}{4!5!}\binom{30}{5}\binom{25}{5}\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\binom{6}{2}$ כמו קודם, כשמחלקים במספר האפשרויות לסדר 4 קבוצות (של 5)
ו- 5 קבוצות (של 2). מחלקים ב- 4!5!.

~~(ט) הסטודנטים עומדים בשורה (תור) בגודל 30.~~
~~לכל מקום יש להתאים זוג קבוצה המתאימה (המורה גם חשוב)~~

~~מש לגודל חבורה $\frac{1}{4!5!}$~~

(ב) $\frac{30!}{(5!)^4(2!)^5 5!4!}$ סדר שלושת $\underline{\ \ }^5\underline{\ \ }^5\underline{\ \ }^5\underline{\ \ }^5\underline{\ \ }^2\underline{\ \ }^2\underline{\ \ }^2\underline{\ \ }^2\underline{\ \ }^2$
משבצים את הסטודנטים 30! אפשרויות.
בגלל חבורה: אין חשיבות לסדר בין הקבוצות $\frac{1}{4!5!}$
אין חשיבות לסדר בתוך הקבוצות: $\frac{1}{(5!)^4(2!)^5}$

צירופים עם חזרות:

נתונים m סוגים של אלמנטים. כמה צירופים בני r אלמנטים ניתן

לבחור מתוך כשאין מספר כלשהו של אלמנטים מכל סוג? (ייתכן שחלק

ולא חייבים לבחור מכל סוג לפחות 1)

הבהרה

תשובה (נוסחה): $\binom{m+r-1}{r}$

דוגמא: זורקים 10 קוביות. מה מספר התוצאות האפשריות, אם:

א. הקוביות זהות:

יש $m=6$ סוגים של אלמנטים (6 תוצאות לכל קוביה)

בוחרים $r=10$ אלמנטים:

$$\binom{6+10-1}{10}$$

ב. הקוביות שונות זו מזו: 6^{10}.