מתמטיקה בדידה

הרצאה מס' 12

בשיעור הקודם הוכחנו: עקרון ההכלה וההפרדה.

נתונים m אלמנטים ותכונות $P_1,\dots,P_t$ שיש או אין לכל אחד מהאלמנטים.

נסמן ב- $W(P_i)$ – מספר האלמנטים שלהם תכונה P_i.

$W(P_iP_j)$ – מספר האלמנטים שיש להם תכונה P_i ותכונה P_j

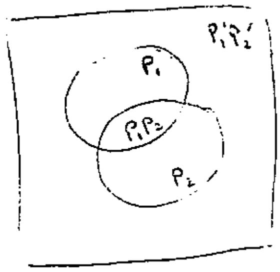
$W(P_i')$ – מספר האלמנטים שאין להם תכונה P_i.

בלי תלות אם יש או אין להם תכונה P_j, לכל $j \neq i$

וכו'

כשאנו משתמשים בנוסחה במקרה כי P_1 את שתיהן הצבע וכי P_2 את התכונות

$$W(P_1'P_2') = m - W(P_1) - W(P_2) + W(P_1P_2)$$



ובאופן כללי, אם יש t תכונות:

$$\begin{aligned}
W(P_1'P_2'\cdots P_t') = {} & \overbrace{m}^{W(0)} - \overbrace{W(P_1) - W(P_2) - \dots - W(P_t)}^{W(1)} \\
& + \overbrace{W(P_1P_2) + W(P_1P_3) + \dots + W(P_{t-1}P_t)}^{W(2)} \\
& - \overbrace{W(P_1P_2P_3) - W(P_1P_2P_4) - \dots - W(P_{t-2}P_{t-1}P_t)}^{W(3)} \\
& + \dots \\
& + (-1)^t \overbrace{W(P_1P_2\cdots P_t)}^{W(t)}
\end{aligned}$$

נעבור הכללה לעקרון ההכלה וההפרדה.

דוגמא נוספת:

כמה סדרות אפשר לרשום עם n_1 "a", n_2 "b" ו-n_3 "c" כך שלא כל ה-a יהיו צמודים ביחד, וגם לא כל ה-b צמודים ביחד ולא כל ה-c צמודים ביחד.

תכונות:

P_1 - הסדרה מכילה סדרה של n_1 a רצופים (ה-a צמודים)

P_2 " n_2 b "

P_3 " n_3 c "

בנוסחה לעיל, N הוא מספר האיברים הכולל שבה לנו אין זהב התכונות. כאן:

$$N = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$

סה"כ $n_1+n_2+n_3$ אותיות זה בגלל החלפ־סדר בין ה-a, ובין ה-b ובין ה-c.

$$W(P_1) = \frac{(n_2+n_3+1)!}{n_2!\, n_3!}$$

$W(P_2)$

$W(P_3)$

$$W(P_1P_2) = \frac{(n_3+2)!}{n_3!}$$

$$W(P_1P_2P_3) = 3!$$

$$W(P_1'P_2'P_3') = N - W(P_1) - W(P_2) - W(P_3) + W(P_1P_2) + W(P_1P_3) + W(P_2P_3) - W(P_1P_2$$

הוכחת עקרון ההכלה וההפרדה

שלילה בנוסח ההכלה וההפרדה:

נסמן $W(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r})$

$$W(r) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le t} W(P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_r})$$

כשהסכום הוא על כל $\binom{t}{r}$ הקבוצות של r תכונות מתוך t תכונות.

$W(r)$ - סופר את כל איבר שיש לו r תכונות (או יותר) לפי קבוצת התכונות שיש לו.

ואלה שיש להם יותר מ-r תכונות נספרים יותר מפעם אחת.

$$W(1) = W(P_1) + W(P_2) + \ldots + W(P_t)$$

$$W(2) = W(P_1 P_2) + W(P_2 P_3) + \ldots + W(P_{t-1} P_t)$$

יש לשים לב שב-$W(1)$ נספרים לא רק האיברים שיש להם תכונה אחת.

למשל אם יש לו 3 תכונות ייספר ב-$W(1)$ 3 פעמים - $\binom{3}{1}$.

ב-$W(2)$ הוא ייספר $\binom{3}{2}$ פעמים, ב-$W(3)$ פעם אחת

וב-$W(4)$, $W(5)$, ... אף פעם $\binom{3}{4}, \binom{3}{5}, \ldots$

נגדיר $W(0) = N$

$E(m)$ - מספר האיברים שיש להם בדיוק m תכונות

$$E(0) = W(P_1' P_2' \ldots P_t')$$

$$E(1) = W(P_1 P_2' \ldots P_t') + W(P_1' P_2 P_3' \ldots P_t') + \ldots + W(P_1' P_2' \ldots P_{t-1}' P_t)$$

$$\vdots$$

$$E(t) = W(P_1 P_2 \ldots P_t)$$

נקבל הנוסחה הבאה:

$$E(m) = W(m) - \binom{m+1}{m} W(m+1) + \binom{m+2}{m} W(m+2) - \dots \qquad (*)$$

$$+ (-1)^{t-m} \binom{t}{m} W(t) =$$

$$= \sum_{j=m}^{t} (-1)^{j-m} \binom{j}{m} W(j)$$

בפרט $c=m$ נקבל את הנוסחה לחלק ההסתברות שאף (p_j) מתקיים

משמעות הנוסחה: מספר האברים שיש להם בדיוק m תכונות

הוכחה: ~~...~~ ...

ב-$W(m)$ סופרים $\binom{g}{m}$ ~~$\binom{m}{g}$~~ פעמים כל אחד שיש לו g תכונות.

לכן צריך להחסיר ספירות אלו של האיברים האחרים ולכן הנוסחה,
הם האיברים שיש להם
כנו בהכלה והפרדה.

איבר עם g תכונות נספר ב-$W(m)$ $\binom{g}{m}$ פעמים.

כאשר $g<m$ הוא אינו נספר אף פעם $\binom{g}{m}=0$

כאשר $g=m$ הוא נספר פעם אחת $\binom{g}{m}=1$.

הוכחת נכונות (*)

נבדוק כמה פעמים נספר איבר עם g תכונות בצד הימני של השוויון (*):

$$\binom{m}{m}\binom{g}{m} - \underbrace{\binom{m+1}{m}\binom{g}{m+1}}_{\text{נספר ב-}W(m+1)} + \binom{m+2}{m}\binom{g}{m+2} \dots + (-1)^{t-m}\binom{t}{m}\binom{g}{t} \qquad (**)$$

בתוספת 1 ב-$\binom{m}{m}$ [illegible]

ב-$W(m)$

נסתכל על הזהות הבינומית: (שים לב בחוברת)

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

הוכחנו
בחירת k ו- $m-k$ מתוך n

$$\binom{m}{m}\binom{q}{m} = \binom{q}{m}\binom{m}{m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{m-m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{0}$$

$$\binom{m+1}{m}\binom{q}{m+1} = \binom{q}{m+1}\binom{m+1}{m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{m+1-m} = \binom{q}{m}\binom{q-m}{1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{t}{m}\binom{q}{t} = \dots \qquad \binom{q}{m}\binom{q-m}{t-m}$$

(**) שווה ל-

$$\binom{q}{m}\left[\binom{q-m}{0} - \binom{q-m}{1} + \dots (-1)^{t-m}\binom{q-m}{t-m}\right] \qquad (***)$$

זהות בינומית מס' 4 בחוברת:

הצבת $x=-1$, $y=1$ בבינום

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$$

ובאופן כללי עם זהות $k>m$:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{m}{i} = 0$$

(כאשר $i>m$ $\binom{m}{i}=0$).

מסקנה: כאשר $q>m$.

$$(**) = (***) = 0$$

כלומר, בצד ימין של (*) נספר איבר עם יותר מ- m תכונות 0 פעמים.
בצד שמאל של (*) הוא נספר 0 פעמים גם באיבר $E(m)$
(מספר האיברים עם בדיוק m תכונות)

כאשר $m<g$ הגון נספר בצד ימין של (*) 0 פעמים כי

האמרה $W(m)$.

ואם בצד שמאל של (*) הוא נספר 0 פעמים.

כאשר $g=m$ הגון נספר בצד ימין פעם אחת ב- $W(m)$

ו- 0 פעמים ב- $W(m+1)$, $W(m+2)$, ...

לכן השוויון (*) מתקיים.

הערה: $E(0)=W(p_1' \dots p_t')$

ובכל $E(m)\neq W(p_1 \dots p_m p'_{m+1} \dots p'_t)$

כי $E(m)$ לפי (*) הוא כמות של אלה שיש להם m תווים

ולא יותר בהכרח אלה שיש להם יותר מ- m תווים.

דוגמא: הפרות סדר

תמורה של המספרים $1,2,\ldots,m$ נקראת הפרת סדר אם אף מספר אינו נשאר במקומו. כמה הפרות סדר יש ל-m אלמנטים?

תכונות: P_i – אלמנט i נמצא במקום ה-i $\quad i=1,\ldots,m$.

רוצים:

$$E(0) = W(P_1'P_2'\cdots P_m') = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j W(j)$$

$$W(j) = \sum W(P_{i_1},\ldots P_{i_j})$$

כשסוכמים הוא את כל $\binom{t}{r}$ האפשרויות (הקבוצות) הבחירה של j תכונות מתוך t.

$$\boxed{W(0) = m}$$

במקרה שלנו:

מספר האפשרויות

$W(P_i)$ – שאלמנט i נמצא במקום ה-i הינו $(m-1)!$

(i במקום ומסדרים את כל היתר)

$$W(P_1) = W(P_2) = \cdots = W(P_m)$$

$W(P_iP_j)$ – מספר האפשרויות שאלמנט i ואלמנט j נמצאים כל אחד במקומו.

$$(m-2)!$$

זהה לכל בחירה של i ו-j.

:

$$\boxed{W(1)} = W(P_1)+\cdots+W(P_m) = \binom{m}{1}W(P_1) = \binom{m}{1}(m-1)!$$

$$\boxed{W(2)} = \binom{m}{2}(m-2)!$$

$$W(m) = \binom{m}{m}(m-m)! = 1$$

ס

$$E(c) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i\, n!}{i!(n-i)!}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i n!}{i!} =$$

$$= n! \sum \frac{(-1)^i}{i!} = n!\underbrace{\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]}_{\frac{1}{e}} =$$

$$= \frac{n!}{e} \approx 0.37\, n!$$

כלומר, בערך 37% מהתמורות הן הפרות סדר.