18.7.91

מתמטיקה דיסקרטית —

הרצאה מס' 11

בשבוע הקודם:

- בחירות עם חזרה — n סוגים, r אלמנטים $\binom{n+r-1}{r}$

- חלוקת אלמנטים לתאים: קבוצה בגודל של מולטינום שונים

- רקורסיות מבעיה אחת לשניה:
להוכיח מיפוי 1:1 בין שתי הבעיות בעזרת הקשר (מבנה הבעיות) זהה.

- זהויות בינומים ובינומיים:

הבינום של ניוטון $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

הגדרה הרחבה של $\binom{n}{r}$

$\binom{n}{r} = 0 \qquad r > n$

$\binom{n}{r} = 0 \qquad r < n$

$\binom{n}{0} = 1 \qquad n \geq 0$

זהות פסקל $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$ וגם $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

לדוגמה: $\binom{2}{0} = \binom{1}{-1} + \binom{1}{0}$

$1 = 0 + 1$

נוסחת סטירלינג (Stirling)

נוסחה נותנת הערכה טובה של $n!$.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\delta} \quad \text{כאשר} \quad \frac{1}{12n+1} \le \delta \le \frac{1}{12n}$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{1}{12n+1}} \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

משולש פסקל :

ולפי זהות [illegible] $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$ בשורה ה- n

עמודה 1 באלכסון, עמודה 2 באלכסון ... עמודה 2 מימין, עמודה 1 מימין

נוכל לכתוב :

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

לא קשה להוכיח ש- $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

כי לפיה זה ש- $\binom{n}{r}$ הוא בשורה ה- n במקום ה- r+1 משמאל

ו- $\binom{n}{n-r}$ נמצא בשורה ה- n ~~במקום~~ במקום ה- r+1 מימין.

תכונה סימטרית זה שלה. וקיבלו השורה משמאל ומימין זה אותו דבר

3

תכונות מקדמים בינומיים שחובה לדעת ולהוכיח ולהשתמש בהן:

סימטריה במשולש פסקל

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

תכונה במשולש פסקל

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \binom{n}{k} \arrow[dr, dash] & & \binom{n}{k+1} \arrow[dl, dash] \\ & \binom{n+1}{k+1} & \end{tikzcd}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

סכום שורה במשולש פסקל

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

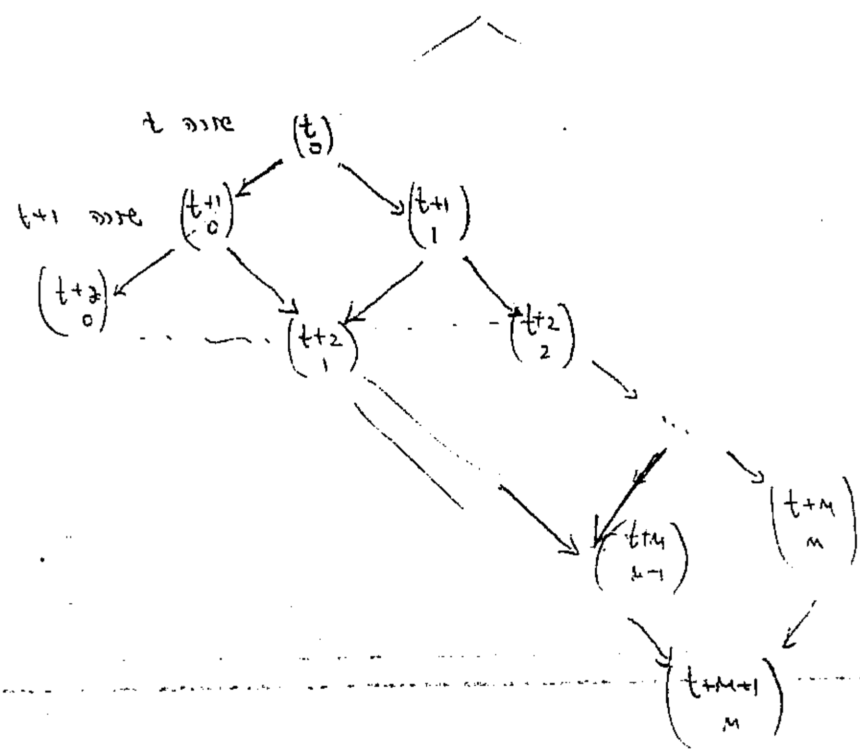
$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \qquad k \neq 0$$

נוכיח ~~[illegible]~~ [illegible] באינדוקציה:

$$\sum_{0\le k\le m}\binom{t+k}{k}=\binom{t}{0}+\binom{t+1}{1}+\dots+\binom{t+m}{m}=\binom{t+m+1}{m}$$

<u>הוכחה בעזרת משולש פסקל:</u>

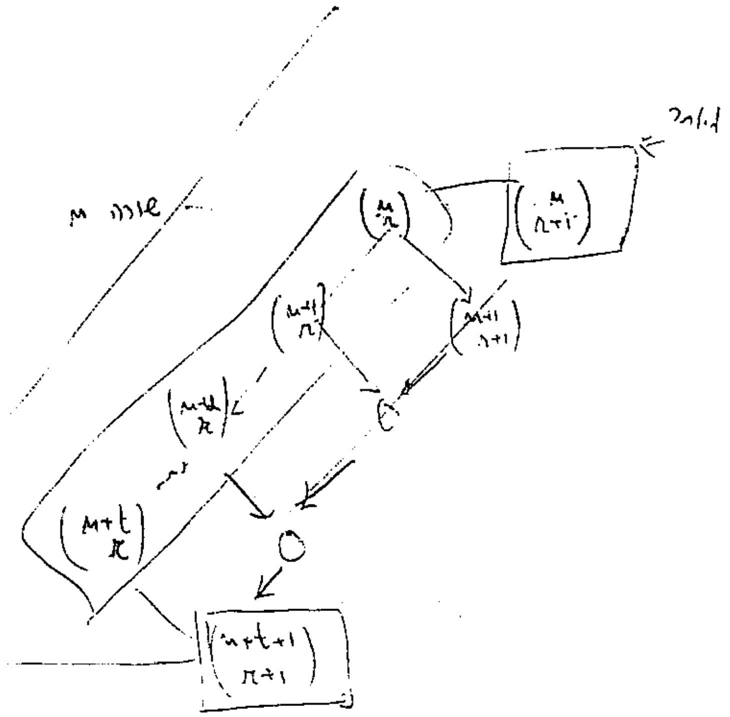


$$\binom{t+m+1}{m}=\binom{t+m}{m}+\underbrace{\binom{t+m}{m-1}}_{\binom{t+m-1}{m-1}+\underbrace{\binom{t+m-1}{m-2}}_{\vdots}}$$

ולכתוב פורמלית ישיר באינדוקציה.

<u>הערה:</u> כל איבר נספר בדיוק פעם אחת.

$$\sum_{k=0}^{t}\binom{m+k}{r} = \binom{m}{r}+\binom{m+1}{r}+\dots+\binom{m+t}{r} = \binom{m+t+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}$$



שורה $m+t+1$

$$\binom{m+t+1}{r+1} = \sum_{k=0}^{t}\binom{m+k}{r}+\binom{m}{r+1}$$

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: $t=0$:
$$\binom{m}{r} = \binom{m+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}$$

נניח שזה נכון עבור t ונוכיח עבור $t+1$

$$\sum_{k=0}^{t+1}\binom{m+k}{r} = \underbrace{\sum_{k=0}^{t}\binom{m+k}{r}}_{\text{הנחת האינדוקציה}} + \binom{m+t+1}{r} = \binom{m+t+1}{r+1}-\binom{m}{r+1}+\binom{m+t+1}{r}$$

$$\binom{m}{r+1}+\binom{m}{r} = \binom{m+1}{r+1}$$

$$\binom{m+t+2}{r+1}-\binom{m}{r+1}$$

$$\sum_i \binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i} = \binom{m}{0}\binom{n-m}{k} + \binom{m}{1}\binom{n-m}{k-1} + \dots = \binom{n}{k}$$

כאן כמה איברים הללו לא מתאפסים, ש- $i > m$ אז $k-i<0$ ⇒ $k<i$

יש שקילות, אחרי הסכום הוא 0.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

בחירת k מתוך n:

מחלקים ה- n לשני קבוצות, אחת בת m איברים והשנייה בת $n-m$ איברים.

מסכמים על כל האפשרויות שבהן בוחרים את ה- k ע"י i מתוך ה- m ו- $k-i$ מתוך ה- $n-m$.

כי קבוצות שונות ע הקבוצות זרות

<u>דוגמא:</u>

<u>בחירת שלושה מ- m ו- $n-m$</u>

בחר 3 מתוך 5:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$$

	12	345
1		345
3×2	1, 2	34, 45, 35
3×1	12	3, 4, 5

1	2345
	$\binom{4}{3}=4$
1	$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית</u>: בכמה דרכים ניתן לבחור m אנשים מתוך n ומהם ועדה
בגודל k וקבוצה בגודל m-k.

(1) נבחר m מתוך n + נבחר k מתוך m.
ועוד כך נבחר (m-k) הנותרים
(2) נבחר k מתוך n + נבחר m-k מתוך הנותרים,
כלומר מתוך n-k.

$$\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$$

(1) <u>נציב $y=1$</u> בבינום של ניוטון.

$$(x+1)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

(2) <u>נגזור</u> לפי x:

$$n(x+1)^{n-1} = \cancel{\binom{n}{0}}\cdot 0 + \binom{n}{1}\cdot 1\cdot x^0 + \binom{n}{2}\cdot 2\cdot x^1 + \dots + \binom{n}{n}n\cdot x^{n-1}$$

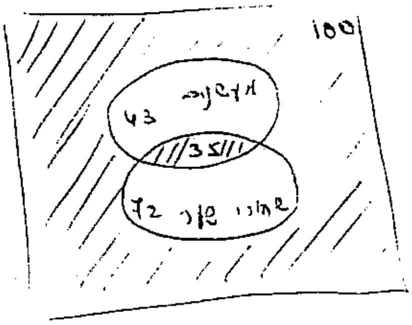
(3) נציב $x=1$:

$$n\cdot 2^{n-1} = \binom{n}{1}\cdot 1 + \binom{n}{2}\cdot 2 + \dots + \binom{n}{n}\cdot n = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$$

עקרון ההכלה וההפרדה

דוגמא: בקבוצה של 100 סטודנטים ידוע ש- 43 גלשנים,
72 שחקני שח ו- 35 סטודנטים הם גלשנים ושחקני שח.
כמה סטודנטים אינם גלשנים ~~ושחקני~~ ואינם שחקני שח?

$|A \cup B| = |A|$



$$100 - \left[\left(\underset{35+37}{72} + \underset{35+8}{43}\right) - 35\right]$$

35 נספרו פעמיים ולכן יש להוריד מההפרדה (זה פשוט לומר)

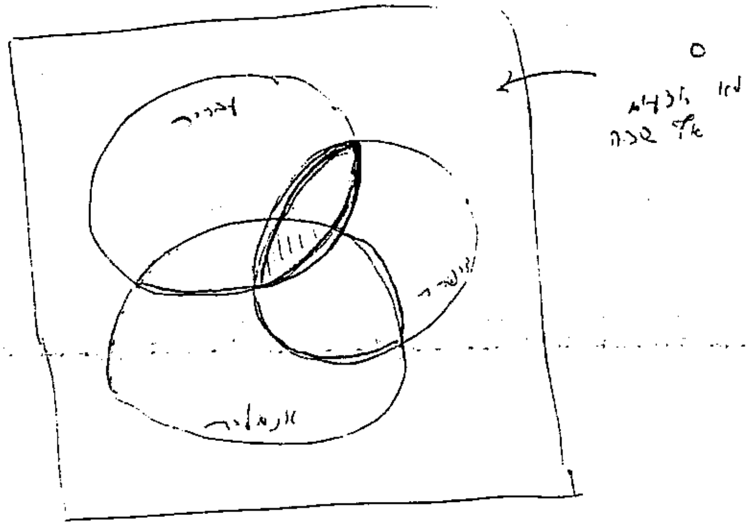
$$x = 100 - (72+43) + 35 = 20$$

3/10/01 פתרון:

א. בכיתה 28 תלמידים 22 דוברי צרפתית, 15 - רוסית, 12 גרמנית - 10 צרפתית וגרמנית, 11 - צרפתית ורוסית, 5 - צרפתית גרמנית ורוסית.

כמה יודעים גרמנית - ורוסית?

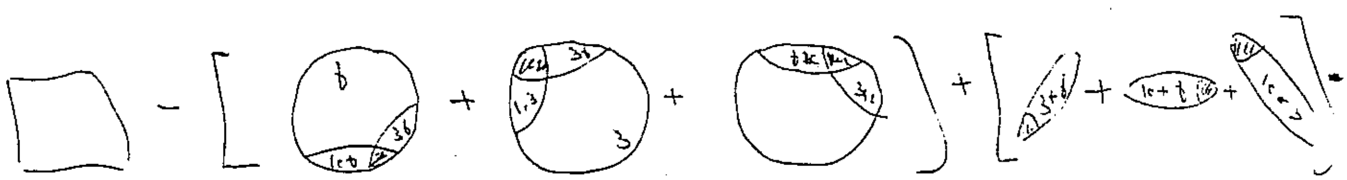
ונניח: כל תלמיד יודע לפחות את אחת משלוש השפות



נסמן את מספר התלמידים + הדוברים ב- X

$$0 = 28 - [8 + 3 + 10] + [(3+8) + (10+3) + (10+8)] - (3+10+8)$$

אף שפה



כל אחד מ- $(k\ell)$ $(3k)$ (3ℓ) נספר פעמיים ב- $k+3+\ell$,

לכן יש להוסיף. אבל אז כולו החתוך 3 פעמים ועוד אחד

3 פעמים, פעמיים, ועוד חוסר אחד. לכן יש להוסיף שנית.

$$0 = 28 - (22+15+12) + (10+10+x) - 5$$

$$x = 6$$

המקרה הכללי:

נתונים M אובייקטים ותכונות $P_1, \ldots, P_t$ שיש להם

אין לכל אחד מהאובייקטים

נסמן ב- $W(P_i)$ מספר האובייקטים שיש להם תכונה P_i.

$W(P_iP_j)$ " " תכונה P_i ותכונה P_j

$W(P_i')$ " " שאין להם תכונה P_i.

זו יודע אם יש להם זו אין להם תכונה P_i

בדוגמה הראשונה נבחר:

P_1 - אדומים ; P_2 - שחורי שיער.

$W(P_1) = 43$ $\quad$ $W(P_2) = 72$ $\quad$ $W(P_1P_2) = 35$

כעת נקבל

$$W(P_1'P_2') = M - W(P_1) - W(P_2) + W(P_1P_2)$$

בקומבינציה השקילה ~~של~~ 3 תנאים

$$W(P_1'P_2'P_3') = m - W(P_1) - W(P_2) - W(P_3) + W(P_1P_2) + W(P_2P_3) + W(P_1P_3) - W(P_1P_2P_3)$$

ובאופן כללי עבור t תנאים:

$$\begin{aligned} W(P_1'P_2'\dots P_t') = {} & m - W(P_1) - \dots - W(P_t) \\ & + W(P_1P_2) + W(P_1P_3) + \dots + W(P_{t-1}P_t) \\ & - W(P_1P_2P_3) - W(P_1P_2P_4) - \dots - W(P_{t-2}P_{t-1}P_t) \\ & + \dots \\ & + (-1)^t W(P_1P_2\dots P_t) \end{aligned}$$

עקרון ההכלה [illegible] הכלה וההפרדה.