23.5.91

לשאלות בקשר הכן!
ספרינג
[illegible]

מתמטיקה בדיסקרטית

הרצאה מס' 10

בשעור הקודם:

צירופים : בחירה , k מתוך n : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

חליפות : בחירה + סדר : k מתוך n : $\frac{n!}{(n-k)!}$

תמורות : סדר : של n : $n!$

תמורות עם חזרות: g_i עצמים מסוג i . $\sum_{i=1}^{t} g_i = n$. מספר :

$$\frac{n!}{g_1! \cdots g_t!}$$

חלוק בכפיות יהי שלמוד את מספרן בין ובין שום בסדר.

תמורות עם חזרות בלתי מוגבלות

בחירת k עצמים מתוך n סוגים של עצמים, עם חשיבות

לסדר הבחירות: n^k

יתכן $n \ge k$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

צירופים עם חזרה:

נתונים n סוגים של אלמנטים. כמה צירופים בני k אלמנטים

יתכנו, אם ניתן לבחור עותקים כלשהו של אלמנטים מכל סוג?

(ניתן מכמה ולא חייבים לבחור מכל סוג לפחות אחד).

נסתכל על סדרה של k עיגולים לאלמנטים + $(n-1)$ עיגולים

למפרידים בין סוגים.

מתוך $k+n-1$ נבחר את k העיגולים לאלמנטים

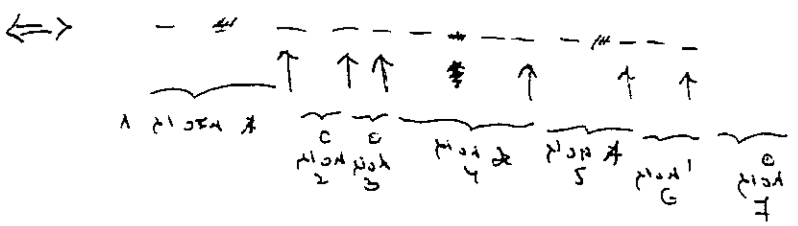
(וכל היתר $n-1$ העיגולים למפרידים).

$\binom{k+n-1}{k}$ בחירות אפשריות.

~~[illegible]~~ דוגמא: 5 אלמנטים מתוך 7 סוגים

7 6 5 4 3 2 1 סוג

: 1 1 2 0 0 1 $\Longleftrightarrow$ בחירה מסוימת:



יש התאמה 1:1 חח"ע בין קבוצת הצירופים עם חזרה

לקבוצת הסדרות של $n+k-1$ אלמנטים עם $n-1$ "מפרידים".

(מספר של קבוצה אחת שווה למספר של קבוצה שנייה

לכן המספר של אלה מהצורה הנ"ל שווה לזה (קבוצות סופיות).

בעיה דומה:

m סוגים; בוחרים r אלמנטים; לפחות אחד מכל סוג.

(נניח ש- $m \le r$).

נסתכל על שורה של $\underbrace{r \text{ אלמנטים}}_{}$ (r זהים). יש ביניהם $r-1$ רווחים.

מתוך $r-1$ הרווחים נבחר $m-1$ שבהם נשים מפרידים (פסים) בין סוגים.

מספר האפשרויות: $\binom{r-1}{m-1}$.

8 אלמנטים, 4 סוגים $\quad | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \iff$ סוג 1 2 3 4 / 2 1 3 2

התאמה חח"ע ועל בין פיזור $m-1$ פסים בין r זהים לבין בחירה r מתוך m סוגים עם לפחות 1 מכל סוג.

נחזור לבעיה המקורית:

שם מותר היה לשים כמה פסים זה ליד זה, כי מותר 0 אלמנטים מאותו סוג.

בהינתן הבעיה המקורית, נעבור לבעיה זו:

~~בחר~~ לבחור r אלמנטים מתוך m סוגים, ללא מגבלה, ~~זהה ל m אלמנטים~~ זה כמו לבחור $m+r$ אלמנטים מתוך m, לפחות 1 מכל סוג.

$$\binom{m+r-1}{r}=\binom{m+r-1}{m-1}$$

(התאמה חח"ע ועל בין בחירות מסוג א' לבחירות מסוג ב').

נמנה הצירופים הבאים:

מה מספר האופנים לבחור r ~~המספרים~~ מספרים שהם <u>שונים</u> מתוך $1,2,\dots,n+r-1$? $\binom{n+r-1}{r}$

נראה התאמה חח"ע ועל ~~לבין~~ בין קבוצת האפשרויות פה לקבוצת (הצירופים עם חזרה) הבחירות של r מתוך n פריטים, ללא חשיבות.

בהינתן בחירה r מתוך n, נתאים לה סדרה לא-יורדת של מספרים: אם בחרנו מספר i ; k פעמים, נרשום $\underbrace{i \dots i}_{k \text{ פעמים}}$

דוגמא: 1122245

מתוך הבחירה של	פעמים מספר
2	1
3	2
0	3
1	4
1	5

ההתאמה חח"ע ועל:
נוסיף 0 למספר הראשון
1 " השני
⋮
r-1 למספר ה-r

$$\begin{array}{r} 1\;1\;2\;2\;2\;4\;5 \\ +\;0\;1\;2\;3\;4\;5\;6 \\ \hline 1\;2\;4\;5\;6\;9\;11 \end{array}$$

<u>טענה</u>: תוצאת ההתאמה היא קבוצה (סדרה) מספרים שונים זה מזה בין 1 ל- $n+r-1$. [הסדרה תהיה עולה].

<u>הוכחה</u>: הסדרה הראשונה לא יורדת, השניה עולה ממש, לכן התוצאה תהיה סדרה עולה ממש.

$a_1 \dots a_r$
$0 \dots r-1$

$a_i \le a_{i+1}, \quad i-1 < i \Rightarrow a_i + i - 1 < a_{i+1} + i$

התאמה 1:1 : יש ~~...~~ בחירות שונות של k מ-n

$a_1 \ldots a_k$ ו- $b_1 \ldots b_k$ שונות יסודר במקום ה-i.

$a_i \neq b_i$ אותו השינוי מוסיפים ו-i אז ~~...~~ בכולם

השונות יופיעו במקום ה-i : $i-1+a_i \neq b_i+i-1$ $a_i+i-1 \neq b_i+i-1$.

התאמה ?: בהינתן סדרה של k אברים של אברים

מ-1 עד $m+n-1$ (בחירת k אברים מתוך $1, \ldots, m+n-1$)

$$-\begin{pmatrix} a_1 \\ c \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k \\ k-1 \end{pmatrix}$$

נחסיר

נקבל סדרה מסוים של אברים בין 1 ל-m

שמתאימה לבחירת k מתוך m פעמים.

יש לוודא: $a_i < a_{i+1}$

$$a_i-(i-1) \leq a_i < i$$

$$\overset{\shortparallel}{(a_i-i)+1}$$

בין 1 ל-m : בסדרה עולה ממש $a_i \geq i$

$\underline{a_i-(i-1)} \geq 1$

$a_1 \geq 1$

$a_1 - c \geq 1$

$a_k \leq m+k-1$

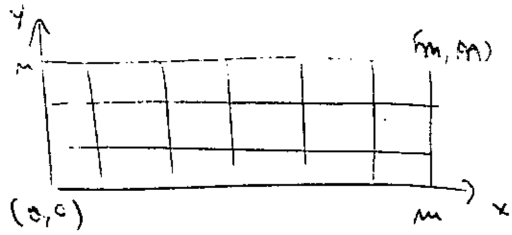
$a_k-(k-1) \leq m$

(ולא ...) הסדרה לא עולה עם מספרים שונים שקולות בסדר.

קבלנו התאמה 1:1 ולכן זה מקבלים בחירות לכל.

בעיה נוספת:

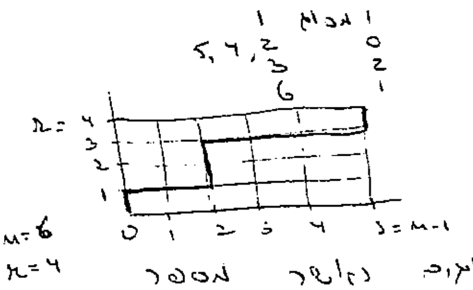
נתונה רשת מלבנית במישור מהנקודה $(0,0)$ עד $(n,0)$ על ציר y
ו-$(0,m)$ על ציר x:



מה מספר המסלולים להגיע מנקודה $(0,0)$ לנקודה (m,n)
כאשר כל הצעדים הם בכיוון אחד <u>למעלה</u> או <u>ימינה</u>?

צריך $m+n$ צעדים בסה"כ שמהם n למעלה ו-m ימינה.
יש לבחור את n הצעדים מתוך $m+n$ שיהיו למעלה
(זה קובע את m הצעדים שיהיו ימינה):

$$\binom{m+n}{n}$$



התאמה לבעיית כדורים ותאים:
מ-$(0,0)$ עד (m,r)
לכל מסלול נתאים בחירה r מתוך m מקומות כאשר מספר
העליות במקום $x=i$ $(i=0,\dots,m-1)$ שווה למספר הכדורים שנבחרו
מקום זה $(i+1=1,\dots,m)$

<u>התאמה זו חח"ע</u> ... סה"כ מספר המסלולים מ-$(0,0)$ ל-$(m-1,r)$:

$$\binom{r+m-1}{r}.$$

חלוקת אלמנטים לתאים:

בכמה אופנים ניתן לשים m אלמנטים ב- n תאים ?
מניחים שכל תא . יכול להכיל <u>מספר כלשהו</u> של אלמנטים.
זוהי קבוצה של בעיות. צריך לברר אפיונים נוספים:

א. האם האלמנטים זהים זה לזה.

ב. האם התאים זהים זה לזה.

ג. האם מותר לבחור אלמנט יותר מפעם אחת ?

ד. האם יש חשיבות לסדר בתוך התאים ?

<u>אלמנטים שונים</u>, <u>תאים שונים</u>, כל <u>אלמנט נבחר פעם אחת</u> ויש <u>חשיבות</u>
<u>לסדר</u> בתוך התאים:

$$n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)$$

הסבר: <u>לאלמנט הראשון</u> יש בחירה של n תאים.

<u>לאלמנט השני</u> יש עוד בחירות: $n-1$ התאים הריקים
משמאל לראשון באותו תא
מימין לראשון באותו תא

הראשון בעצם חילק את התא שלו לשניים.
השני בעצם חילק את התא שלו לשניים (אחד מתת-התאים
שיצר הראשון). לכן לשלישי יש $n+2$ אפשרויות וכו'.

אלמנטים זהים, תאים שונים, כל אלמנט נבחר פעם אחת:

לשים m אלמנטים ב-r תאים זה כמו לבחור m אלמנטים מתוך r סוגים (בלי חשיבות לסדר). זה אומר [illegible]

$$\binom{m+r-1}{m}$$ [illegible] $r-1$ ו-m [illegible].

[לשים בתא i זה לבחור שהאלמנט הוא i].

דוגמא:

מספר האפשרויות לחלק $\overset{m}{20}$ חתיכות שוקולד ל-$\overset{r}{3}$ ילדים:

$$\binom{m+r-1}{m} = \binom{20+3-1}{20} = \binom{22}{2}$$

אם כל ילד מקבל לפחות חתיכה אחת:

$$\binom{20-1}{3-1} = \binom{19}{2}$$

m חתיכות, $m-1$ רווחים, לשים $r-1$ מחיצות.

ואם יתכן שילד לא יקבל אף חתיכה:

מוסיפים 3 חתיכות פיקטיביות ומחלקים: $\binom{23}{2}$

וכך "מקבל" כל ילד אחת.

זהויות במקדמים בינומיים

המספרים $\binom{n}{r}$ נקראים מקדמים בינומיים בגלל המשפט הבא:

משפט הבינום של ניוטון:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

הוכחה: נרשום

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{n}$$

המקדם של $x^i y^{n-i}$ מתקבל מכך שב-i מתוך n הגורמים בחרנו ~~[illegible]~~ את ה-x ובאחר את ה-y.
מספר האפשרויות לכך: $\binom{n}{i}$

(ואפשר להוכיח את הבינום מן שוויון ב-$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$ (*)].

מקרים: $\binom{n}{r}$ עבור $n<r$, $r<0$, $n=0$ (n חיובי, r שלם)

לפי ההגדרה חוקי.

$$\binom{n}{r} = 0 \qquad r > n$$

$$\binom{n}{r} = 0 \qquad r < 0$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad n \geq 0$$

לכן נקבל (*)

$$1 = \binom{2}{0} = \binom{1}{0} + \binom{1}{-1} = 1+0$$

זהויות במקדמי הבינום:

① $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

[illegible] נבון

② $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ סימטריה בשורה

③ סכום שורה במשולש פסקל

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n} = 2^n$$

הוכחה: נציב בבינום של ניוטון $x=y=1$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cancel{x^i y^{n-i}} = (1+1)^n = 2^n$$

הוכחה קומבינטורית:

~~לבחור~~ לבחור n עצמים מתוך 2 סוגים שונים (2^n) שזה ל-

אלמנטים שונים

בחירת 0 מסוג זה, + 1 מסוג זה, + ... + בחירת n מסוג זה.

④ $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

הוכחה: נציב $x=-1$, $y=1$

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} = (x+y)^n$$

5

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

<u>הוכחה טכנית</u>: הצבה.

<u>קומבינטורית</u>:

בחירת $k+1$ מתוך n:

בחירת k מתוך n + בחירת 1 נוסף. $\binom{n}{k}(n-k)$

ספרנו יותר מדי:

כל בחירה של $k+1$ איברים בחרנו אותה $k+1$ פעמים

כשכל פעם הוספנו איבר אחר מתוך ה- $k+1$.

לכן יש לחלק ב- $k+1$.

6

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k} \qquad k \neq 0$$

<u>טכנית</u>: הצבה

<u>קומבינטורית</u>:

בדומה ל- 5. הפעם בוחרים קודם את האיבר הבודד -

n אפשרויות ואחר כך $k-1$ איברים מתוך $n-1$ הנותרים.

תוצאת ספירה: k פעמים כל בחירה של k.