**חשיבה חזותית במתימטיקה ובחינוך מתמטי -- רב-שיח**

**בהשתתפות: אלנה נרדי (מנחה), רינה הרשקוביץ, נורמה פרסמג, רז קופרמן, מיכל ירושלמי**

שלום,אני אלנה נרדי מאוניברסיטת מזרח-אנגליה בבריטניה.לעונג ולכבוד הוא לי להנחות דיון זה על ויזואליזציה בהוראת מתמטיקה. לדיון יתרמו נורמה,רינה ,מיכל ורז ממבט קרוב יותר של מחקר ועבודה מעשית בהוראת מתמטיקה ברמות שונות.

ראשית, ברצוני להודות לקן על הדיון הנפלא שלו במליאה ולהזמין אותו להצטרף לצוות הדיון הזה לתרום ממחשבותיו בפרק השאלות והתשובות.

התקצירים המאתגרים של קן דנו בשאלה השנויה במחלוקת האם סטודנטים מעדיפים חשיבה אלגוריתמית או חשיבה ויזואלית.אך אנו טוענים כי המורים למתמטיקה חייבים לפחות לחדד את ההגדרות שלהם לגבי מהותה של הויזואליזציה. אציג את התגובה לאתגר של קן באמצעות תגובותיהם של המשתתפים במחקר שלי שהם בחלקם מתמטיקאים באוניברסיטה ובחלקם מורים בביה"ס התיכון.הנושא המאחד את מחקרי ארוכי -השנים באוניברסיטה הוא היותם של מילים וסמלים הרחבה של יכולת התלמידים להבין את המתמטיקה.

לפני שנים אחדות ג'ק וויט הציג משהו דומה מאד לנושא הנידון בדברו על "ללמוד לראות כמתמטיקאי".בהמשך לקו מחשבה זה ,אני עומדת להציג בפניכם את החזון לויזואליזציה שהתגבש אצלי במרוצת השנים ובמשךהראיונות שקיימתי עם מתמטיקאים. אלה דברו על התנגדות (תגובה שאנו מכירים כבר מעבודתם של טד וטומי). הם דברו על תמונות ללא טקסט ולפעמים על כך שהשתמשו בתמונות מנותקות מטקסט. אם כך הם התמקדו בשלושה סוגים אלה:התנגדות,תמונות ללא טקסט ותמונות מנותקות מטקסט. רוב הסטודנטים שבהם דנו משתתפי המחקר שלי היו בשנת הלימודים הראשונה שלהם באוניברסיטה. מה שאפיין אותם היה תפיסה מטושטשת של נושא הויזואליזציה.הם ספרו על התחושה שמקננת בהם שהם רשאים להשתמש רק באמירות שהוכחו קודם, אך לא היה ברור להם די הצורך מה מהידע שלהם נחשב מוכח..מענין לציין כי מרואייני הוכיחו שטשטוש זה יכול בעצם להיות יצירתי ביותר.שכן תמונות מספקות ראייה והויזואליזציה לדעתם היא צורה שלישית של שפה במתמטיקה.

לאור זאת טענו משתתפי מחקרי כי יש להרשות לסטודנטים שלנו להשתמש בעובדות ,אף שלא בססו אותם רשמית.יחד עם זאת ,הוסיפו, יש להבהיר להם כי הם אמורים להוכיח זאת מאוחר יותר בצורה פורמלית.הם הדגישו כי אין לרפות את ידי הסטודנטים מלהשתמש בכוח שהויזואליזציה מעניקה,אך יש לעשות זאת בצורה מתוחכמת. הם אף ציינו שכל מה שסטודנט רואה בגרף חייב להיות פתוח ,שקוף ובהיר, כלומר יש לעודדו להשתמש במילים, ובטקסט מסביר.ובכן לפנינו חוזה ברור ומוגדר אם כי מאתגר.

עתה אני עומדת לצטט את ספירו,מורה למתמטיקה מאתונה שביוון. מורה זה שמיטיב להתבטא ואתו עבדתי ,מציב אתגר לחוזה הברור הזה. שאלתי אותו אם היה מקבל מתלמיד בבית -הספר התיכון טיעון המבוסס על גרף .. הוא השיב בפסקנות כי היה מסרב ,כיון שזהו השלב בלימודי המתמטיקה שההוכחה חשובה בו למבחנים ולהשלמת מבחני הבגרות.

מכיוון שאנו עוסקים בויזואליזציה, יש לי את הסימן הויזואלי שבו אני מודיע לדובר בחלוף חמש דקות ואחר שתי דקות ולבסוף כשיש לו עוד דקה לסיים את דבריו....

נורמה הדוברת הראשונה בפאנל זה:

תודה לך ,אלנה, על שייצגת אותנו בצורה כ"כ נאה, אני נורמה פרזניק והאתגר שלי היה מה לדחוס בעשר דקות השיחה שהוקצבו לי. לכן החלטתי להרחיב את הדיבור על מהות הויזואליזציה. יש לי כאן חומר רב שאינני מתכוונת להשתמש בו, כי אלנה טענה שאי אפשר לטפל בכל הנושאים בעשר דקות. אבל הכנתי את כל החומר למקרה שאזדקק לו בהמשך.

הבה נתחיל מיד בהגדרות:היו חוקרים שעסקו בדימויים חיצוניים ופנימיים. ג'רי גולדן שנמצא כאן איתנו עשה הבחנה זאת במאמרו על ייצוגי משמעות. דעתי היא שאין צורך ליצור הבחנה כ"כ חדה בין סימנים ויזואליים פנימיים וחיצוניים. והסיבה :פשוטה: כאשר אנו רוצים לשרטט דיאגרמה, מתרחש ממילא תהליך של ויזואליזציה נפשית. ובכן בהגדרות אלה השתמשתי בשנים האחרונות. לעומת זאת, במאמריי משנות השמונים לא דברתי על סמיוטיקה (החוקרת את כל מערכת הסימנם והדימויים כאמצעי להעברת משמעות). זהו תחום שהתחלתי לגלות בו עניין רק מאוחר יותר.. הרי איננו יכולים לעבוד ישירות עם האובייקטים של המתמטיקה, אלא עם הסימנים המייצגים אותם. לכן נוכל לחשוב על דימויים נפשיים כאמצעי העברה פנימי של משמעויות.

ראיון זה הוא בהמשך לפיאז'ה ואיינהולדר, הטוענים שדימויים ויזואליים מונחים בבסיס יצירת כל תמונה או תצורה בחלל. אך לא אדון יותר בכנס זה בדיכוטומיה בין דימויים חיצוניים ופנימיים.

מהו דימוי ויזאולי בשבילי? זה סימן נפשי המערב מידע חזותי ומרחבי. כך בפשטות כלי ההעברה של סימנים במתמטיקה הם לעיתים קרובות בעלי אופי ויזאולי . אף כשאנו עוסקים בסמלים אלגבריים, נראה לעיתים קרובות ארגון מרחבי ונוכל לומר שהם יכולים להיות חזותיים.

יחד עם זאת ,ניתן לדון בהרחבה בהעדפות אישיות כמו שקן עשה. בשיחתו היפה הזכיר קן שלמעשה השתמשתי ברעיונותיו של סילוסונו בפיתוח המבחן האישי שלי לויזואליזציה. נכון, אך בשונה מסילוסנו אני כן רציתי להשתמש בויזואליזציה ביחס למורים בתיכון וגם ביחס לתלמידי תיכון בכיתות הגבוהות.

התהליך התפתח בשלושה שלבים: בשלב א' פיתחתי בנק בעיות שכלל מאות בעיות וכמה מהבעיות נלקחו מהעבודה של סילוסונו. הרבה נלקחו מספרים רוסיים ואחד מהם נקרא "פזלים ממוסקבה" .כדי להיכנס לבנק הבעיות שלי, הייתי חייבת לפתור את הבעיה, הן בצורה ויזואלית והן בצורה בלתי ויזואלית. כדרך שסילוסונו פיתח את מבחניו, גם אני הגעתי למסקנה שמן הראוי שהבעיה לא תוצג ע"י שרטוט, אלא באופן מילולי. אחרת השרטוט עלול להשתלט על תהליך פתרון הבעיה. אוכל לתת מספר דוגמאות אך נראה לי שלא יספיק לי הזמן לכך. לכן ,הרשו לי לומר שצורת הסתכלותי על הנושא קרובה יותר לזו של קרוטיצקי. עלי גם לציין שקן קבע שאני הושפעתי במידה מרובה ע"י אופן חשיבתו של אלן בישופס וזה אכן נכון. הוא עסק בפרשנות של מידע פיגורטיבי ובעיבוד ויזואלי כשתי תבניות שונות. לי בעבודתי היה הרבה יותר שימושי לחשוב על 2 צירים של x ו-y.

כיוון שאין חשיבה מתמטית בלי הגיון, נוכל לחשוב על חוזקו של ההגיון על ציר של x ועל חוזקה של ויזואליזציה על ציר y, ואני אכן גיליתי שאתה יכול להיות חזק מאוד במתמטיקה בלי להיות חזק בעיבוד ויזואלי. כלומר יש לנו את כוחו של ההיגיון מצד אחד ומצד שני את עוצמת הויזואליות.

טיפוס ויזואלי, להערכתי ,הוא סטודנט המעדיף להשתמש בשיטות ויזואליות לפתרון בעיות, אותן ניתן לפתור הן בשיטות ויזואליות והן בשיטות לא- ויזואליות. רציתי להראות לכם את התפלגות התדירות של תוצאות השימוש בויזואליזציה. הקווים הכחולים הם מהמבחן המקורי שלי. האמינות והתוקף של המבחן נקבעו לראשונה בדרום אפריקה. כפי שאתם רואים יש כאן כמעט התפלגות נוסח גרסיה. ערכתי מבחן זה עם אוכלוסיות רבות ולפעמים הנטייה הייתה יותר לצד הלא ויזואלי. הויזואליות המתמטית היא על ציר x והתדירות נמצאת על ציר y.

באוכלוסיה הכללית אתה רואה שלגבי רוב אנשים זה תלוי במשימה עצמה, אם הם עתידים להשתמש בגישה הויזואלית או בגישה הבלתי ויזואלית . הדבר יהיה גם תלוי בהוראות לביצוע המשימה בצורה מסויימת זו או אחרת.. באותה עת יש לקחת בחשבון גם את ההעדפות האישיות של האנשים: ישנם כאלה שתמיד ינסו לחשוב באורך ויזואלי ובצד הנגדי של הסקאלה ישנם אלה המשתמשים בראיה הויזואלית לעיתים רחוקות. אם כך, הנושא המרכזי במחקר שלי היה הבנת הנסיבות המשפיעות על אנשים לפעול כך או אחרת ואיך המורה מאפשר גישה זאת ומקל על ביצועה.

 נקודה חשובה ביותר בעבודתם של טומי וטד, היא הטענה שלהם שתלמידים אינם רוצים לחשוב ויזואלית. אני לא סבורה שתלמידים מגלים אי רצון לחשוב ויזואלית. האמת רחוקה מכך. יש תלמידים שאין להם אופציה אחרת והם חייבים לחשוב ויזואלית. אך הדרך המועדפת מושפעת לעיתים ע"י המורה וע"י התרבות של התלמידים בכיתה ומכאן מובנת אי נכונותם לחשוב ויזואלית כי זה עלול להיחשב כמתמטיקה לא ראוייה.

 לקרוטיצקי הייתה השפעה רבה על המחקר בנושא והוא עמד בתוקף על כך שגם אם יש לנו דימוי ויזואלי ,הוא לא חייב להגביל את החשיבה. היו שתי דרכים במחקר שלי ובזמן שנותר לי אוכל לתאר לכם אותם. התברר לי כי התלמידים מסוגלים להתגבר על הקשיים הכרוכים בעיבוד ויזואלי. דימוי מוחשי יכול לקשור מחשבות למאפיינים מסויימים אף שייתכן שאינם קשורים למתמטיקה.מצאתי סוג של דימוי שאני מכנה דימוי תבניתי בעל אופי מופשט ואשר סייע לתלמידים להתגבר על קשייהם.

הדרך השניה בה יכלו לגבור על הקשיים שלהם הייתה ע"י שימוש במטאפורות ויש לי דוגמאות נהדרות לשימוש במטאפורות שתלמידים המציאו בעצמם ואלה נשאו אופי ויזואלי. הם איפשרו להם לחבר את התחום המתמטי למשהו קונקרטי בחייהם. לדוגמא : תלמידים שעבדו עם סדרת מספרים, כלומר בעיה נוסח גרסיה, התבקשו לחבר את המספרים מאחד ועד מאה. כששאלתי את התלמיד שביצע את המטלה במהירות רבה כיצד עשה זאת, הוא ענה לי כי זה ממש כמו **הקשת בענן**: אני מחבר מספר 1 עם 100 ואחר כך מספר 2 עם זה שבצד השני -99 וכן הלאה. כך היה לו דימוי הקשת בענן-המטאפורה המעולה שסיפקה לו שיטת עבודה לקבלת תוצאה מהירה.

לא אוכל לעבור על הכל מחוסר זמן. ברצוני רק להדגיש שהיו 13 שאלות בעלות משמעות שהעליתי בכנס במכסיקו לפני שנים אחדות. שאלות אלה התבססו על שאלות שהציג פרויידנטל לקהילת המתמטיקאים לפני זמן רב. 13 השאלות האלה נוגעות בתחומי הויזואליזציה שבהם יש עוד להוסיף ולחקור. הרבה מהשאלות האלה הפכו לאתגרים עבורנו ואני מצפה לראות את המחקרים הנוספים שיערכו בתחומים אלה.

 רינה הרשקוביץ, המשתתפת השניה בפאנל::

בוקר טוב, אני החלטתי להשתמש בדוגמאות ולא בתרשימי -זרימה. יש שתי נקודות שהייתי רוצה לדון בהם-האחת ויזואליזציה כדרך חשיבה מתמטית והשניה ויזואליזציה כשפה. את הדרך הראשונה קל מאוד להציג ע"י דוגמאות אך לא את השנייה. ואתייחס לדוגמא הראשונה והעיקרית: בוקר אחד איזי ויינצוייג ניכנס למשרדי והציג בפניי בעיה יפה מאוד. באותה עת אפילו לא הערכתי שהיא כ"כ יפה. הוא הראה לי ריבוע מורכב מריבועים קטנים והכל מגפרורים.השאלה הייתה כמה גפרורים יש בכל המבנה. התלמידים היו אמורים לחשב זאת ביותר מדרך אחת ולהסביר את שיטתם. את הבעיה הזאת גם הצגתי בארצות רבות כאשר העברתי קורסי השתלמות למורים בתפקיד. בשיטה אחת נתבונן בחלק שמעל האלכסון ואז נחשב ריבועים שהם שתיים כפול שתיים או שתיים כפול שלוש ואח"כ להכפיל בשתיים. מה שיש לנו זוהי העברה ויזואלית כלומר לפנינו דגם המאפשר לספור בצורה מאוד שיטתית ,אך המוצר הוא סמלי.

דרך נוספת לפתור את הבעיה היא לראות אותה כמו מדרגות ואנו עוברים מאחת ,לשתיים, לשלוש בצורה אופקית ואח"כ אנכית. דרכי פתרון שונות אלה נעשו בצורה ויזואלית. הייתי מכנה זאת דרך חשיבה מתמטית ויזואלית. שפת המוצר הייתה סמלית, לא שפת התהליך. מה שיפה הוא שהשיטה מאפשרת יחסים סימטריים או רפלקסיביים בין ויזואליזציה ןבין הדרך הסמלית.

האם אנחנו יכולים להגדיר דרך חשיבה ויזואלית? מה עשיתי אני? לקחתי את ההגדרה מאסכולת פרויידנטל או מקבוצת פרויידנטל, החוקרים טרפרס וחופרי, אשר קבעו שחשיבה מתמטית יכולה להיות אנכית, כלומר מייצגת את התהליך של בניית ידע מתמטי במסגרת המתמטיקה ובאמצעים מתמטיים. והרי לפניכם דוגמא של קבוצת מורים שנכשלו כי הם העדיפו לתרגם את הבעיה לסדרות של מספרים. מאחר והם לא היו לינאריים, הם לא הצליחו למצוא את הפתרון. אף כי עמדה לרשותם שעה וחצי ,רק אחד מהם התקרב לדרך החשיבה הויזואלית והצליח לפתור את הבעיה.. כלומר ייתכן, כמו שאת טוענת, נורמה, שויזואליזציה זה עניין של תרבות ואם זאת דרך החשיבה של מורים ,מה יהא על התלמידים ?!

הדוגמא הבאה היא בת כחמש שנים. מורה בתוכנית אגם לחשיבה ויזואלית הציג סדרות זמניות. אך כאשר הם היו צריכים ליצור זאת בעצמם ,ניתן היה לעקוב אחרי תהליך של שימוש בדימיון.התרשים

 נראה כמו קרני שמש והוא דו-מימדי.

לסיום, אציע שניקח את הויזואליזציה כערך בפני עצמו, כמו אלגברה ושברים ונבנה כמה סדרות או מסלולי -פעילות ללומדי מתמטיקה בגילאים שונים ,כי זה כלי מתמטי רב- עוצמה.

מיכל: ירושלמי מאוניברסיטת חיפה.

אחרי ההערות של קן ונורמה על ההגדרה התיאורטית של הויזואליזציה ואחרי שראיתי את התקצירים של דבריהם, החלטתי להציג נקודת מבט אחרת שהיא חלק מעבודתי אותה אני מכנה "נקודת המבט של המעצב. אף כי רוב מחקרי הוא בתחום הקוגניטבי, החלק העוסק בהתפתחות נוטה לצד הטכנולוגי, כך שאני אדבר על כך מעט. טומי הפציר בנו אתמול להציג שאלות ואני ניסיתי נואשות להפוך כל אמירה לשאלה. ...

ארצה לדבר על שלושה אספקטים ביחס לויזואליזציה ואתחיל בממצאי שנות השמונים של טומי וטד. אני חייבת לומר כי הדפים שנהגתי לתת לתלמידים מתחילים היו לכאורה פשוטים למדיי. אח"כ התעצבנתי כי התלמידים תמיד חזרו אליי במהירות ואמרו: הטלת עלינו לקרוא מאמרים אלה שבהם נידונה אי- נכונתם של תלמידים להשתמש בויזואליזציה. אם כך, איך את דוחקת בנו להשתמש דווקא בצורה ויזואלית?! כמובן שזה לא מה שטומי אמר, אך הנושא הפך לאתגר בשבילי.

 אמנם לא בדקתי תלמידים של ימינו, אך יש לי כמה השערות בנושא. כיון שהטכנולוגיה העכשווית היא כ"כ ויזואלית, היא הפכה למעשה להיות תרבות ואדגים זאת. אני מניחה שנמצא שינוי בגישת התלמידים, אם כי אני גם מסכימה שהדבר תלוי בטיב המשימה, בהוראות שאנו נותנים לגביה, וכמובן בהעדפות אישיות. אני הייתי מאוד מעוניינת לראות מה קורה עכשיו עם מגוון הרעיונות שהוצגו קודם.

הטכנולוגיה שינתה את הצורה בה אנו מתייחסים למוצרים חזותיים. הם הרבה יותר מורכבים כלומר חדלו להיות סמליים או גרפיים. כשאתה אומר את המילה גרפים זה כולל הרבה דברים.אנחנו צריכים לדבר על סמנטיקה ואכן נורמה החלה לדבר על סימנים ויזואליים.אם כך נושאים אלה הם אינטראקטיביים.השאלה היא מה אתה עושה עם דיאגרמה נתונה.איך תוכל לקחת תרשים ולהפוך לגרף מצויר כאשר אתה משתמש בטכנולוגיה.

הנקודה השלישית היא שויזואליזציה היא עניין מאד חברתי:אנשים מדברים באמצעי התקשורת בצורה ויזואלית.רק להזכיר דוגמאות מספר:כשאתה מדבר על חומר ויזואלי במתמטיקה ,אתה מדבר על סימולציה דינמית או על וידאו,תרשימים או אייקונים שניתן להפוך לגרפים.כל המונחים האלה הם חדשים ולא היו חלק מהטכנולוגיה הישנה .זה אינטראקטיבי וניתן לשליטה..על מנת להדגים את המאפיין האינטראקטיבי נוכל לדמיין רכבת שדים בלונה -פארק. דוגמא נוספת: אתם מכירים בודאי את המשחק שבו אתה נותן מילה וגרף והם חייבים להתאים ביניהם(מיכל מציגה פרוייקט שהיה חלק מעבודתה בשנת 2007,גלית בוצר.)זאת מתמטיקה בטלפון נייד :אתה יכול לשלוח מסרונים שהם תרשימים ואתה מתבקש לעשות בתרשים בדיוק מה שעושים במשחק עם מילים וגרפים.עליך לראות את זה נכון ולנחש את הסיטואציה. כל מה שאני מנסה לומר הוא שהמצב השתנה.והמצב שונה גם בשל שינוי בנקודת המבט התאורטית שלנו.

כידוע ,אנו מוצאים את מה שאנו מחפשים והיום אנו מחפשים ומוצאים דברים שונים מאלה שחפשנו לפני 25 שנה.הדבר נכון גם לגבי, כי אני עוסקת במחקר זה כבר 30 שנה

נהגנו לשאול איזו תצוגה תופיע ראשונה בעבודותיהם של סטודנטים סמלית או גרפית? זאת איננה השאלה שנשאלת היום.היום אנו מציגים שאלות לגבי שליטה ,האנשה של סימנים, טיב הויז'ואל שהם עוסקים בו. היום אנו מדברים על ויז'ואל כשפה, אך לא אוכל להרחיב על כך את הדיבור.היום אנו דנים ביצוגיות. פעם נהגנו להתבונן בדיאגרמה ,לדוגמה כמשהו סטטי ולשאול מה אתה עושה עם דוגמה ויזואלית.אך השאלה שאתה מציג היום לגבי טכנולוגיה דינמית תהיה שונה לחלוטין

הייתי מאד רוצה לדעת איך היה נראה המחקר של טד וטומי אילו נערך היוםעל ילדים בני ימינו.

ברצוני להבהיר משהו לגבי עבודתי:אחד הדברים שעשיתי עם יהודה שוורץ ,וזה התחיל עוד בהארוורד ונמשך עד ימינו, נקרא" תוכנית הלימודים הויזואלית במתמטיקה לחטיבת ביניים ואחר לתיכון." בעברית נקרא הפרויקט "לראות מתמטיקה" כי זה היה הרעיון המקורי שהמבנה של המתמטיקה שאתה לומד יהיה נראה לעין. זוהי מתמטיקה ויזואלית.רוב האנשים חושבים שהתוכנית דנה בסמלים וגרפים גרידא.לגבינו אין זה ייצוג ויזואלי בעלמא ,אלא עוסק בשאלה איך להפוך את המבנה של המתמטיקה לנראה לעין.

השימוש שלנו במילים "ויז'ואל" ו"ויזואליזציה" הוא בעייתי ומטעה.דומה הדבר לשימוש במילים "כללי "ו"הכללה". זה אספקט מענין אחר של ויזואליזציה שחשבתי שראוי לדון בו..אם כך, כל הענין במתמטיקה ויזואלית הוא לא היותה אוסף של גרפים אלא מגמה להפוך את מבנה המתמטיקה לכזאת הנראית לעין.

הנקודה השלישית שעליה אצביע דנה בכך שכאשר אתה מתחייב לשנות חשיבה וללמד ויזואליזציה ,כמו שרינה הציעה ,לקחת החלטה חשובה ,ואתה עומד ללמד מתמטיקה שונה.נאמר כבר הבוקר שאף אם סטודנטים יבחרו בשיטת הויזואליזציה ,הם עדיין יחשבו שאין זו מתמטיקה טובה ולכן ימנעו מלהשתמש בה.. ובכן עדיין מוטל עלינו להגדיר מהי מתמטיקה טובה.

 רז קופרמן מהמכון למתמטיקה באוניברסיטה העברית

צר לי לומר שאני מתמטיקאי ,כלומר הייתי בפאניקה טוטלית כשהתבקשתי לשאת כאן דברים על ויזואליזציה. בעצם היו לי שתי אופציות או לדבר על האופן בו אני ממחיש את המחקר שלי או כיצד אני, המורה משתמש בויזואליזציה.בחרתי באופציה השניה ,הקלה יותר...

בשלושת השנים האחרונות לימדתי ניתוח בעיות לתלמידי שנה ראשונה באוניברסיטה,קורס שהוא אבן- הנגף העיקרית של הסטודנטים. ההנחה היא שאם עברו את קורסי השנה הראשונה, הם גם יצליחו לסיים את התואר. לידיעתכם, בשנים האחרונות עלה שיעור הכשלון בצורה דרמטית:היו שנים בהם הגענו ל-80% כשלון במבחן הראשון של תלמידי שנה ראשונה. כמובן, אנו תמיד מאשימים את התיכון ממנו הם מגיעים בלתי- מוכנים ללימודי מתמטיקה באוניברסיטה.תהא אשר תהא הסיבה, עלינו להתמודד עם העובדה שכל כך הרבה נכשלים.

.תוכנית הלימודים במתמטיקה היא הרגילה:מספרים,פונקציות,גבולות,סדרות, המשכיות,אינטגרלים-התוכנית הרגילה של שנה ראשונה.ניסינו להבין מה קורה ,מדוע הם נכשלים וזאת ע"י מתן בחנים לעיתים קרובות. הגענו למסקנה שהם מאבדים מגע עם החומר בשלב מוקדם ביותר .אחרי 3 שבועות הולכים רוב התלמידים לגמרי לאיבוד. רוב הסטודנטים הם בדרך כלל בני 23-24,אחרי שרות צבאי ואחרי טיול למזרח הרחוק או לדרום אמריקה...הגיעו בנפשכם ,תוך 3 חודשים אמורים הם לשלוט בשפה שהיא מאד מופשטת ולא רק לשלוט בשפה אלא גם להיות מסוגלים לפעול בתוכה.

כשאתה מנסה לאתר את הנקודה בה הם חדלים להבין,אני חושב שהמושג "גבול"הוא התשובה ומושג זה הוא קרוב לודאי הדבר החשוב ביותר שיש להבינו בשבועות הראשונים של הלימוד, כי בעצם הכל גבולות :נגזרות הן גבולות,אינפי זה גבולות,אינטגרלים הם גבולות, סדרות אינסופיות הן גבולות.כלומר זהו מושג שהם חייבים לשלוט בו במהירות, כיון שהם משתמשים בו מיד. דברנו רבות על ויזואליזציה:מהיסודי עבור לתיכון יש שימוש בעזרי- המחשה. איני יודע אם השימוש הוא מיטבי ,אך אם תתבונן במבחני הבגרות יש בהם הרבה תמונות.גם בפונקציות ,בגיאומטריה,בניתוח -נתונים תמצא תמיד תמונות.השאלה שראוי לדון בה בבואנו להקנות לסטודנט שפה מופשטת היא באיזו מידה עלינו להשתמש בויזואליזציה .אני סבור שעלינו להעזר בכלי זה ככל שנוכל ונמצא שהוא שימושי ומסייע ללמידה.

פונקציות הן דוגמה טובה.כשאני מתחיל ללמד פונקציות,אני מתחיל בדבר שהוא במובן מסוים ויזואלי שכן אני מתייחס לפונקציה כאל מכונה שיש בה קלט ופלט :אתה מזין מספר ומקבל מספר.

ועתה נעסוק בגבולות שהם, כפי שציינתי ,הדבר הקשה והחשוב ביותר להבנה בשבועות הלימוד הראשונים באוניברסיטה. אני ניגש ללוח,משרטט פונקציה,מציין A שבו אנו מחפשים את הגבול ואת ערך הגבול ואז אני ממשיך צעד אחר צעד ומבקש מהסטודנטים: תנו לי אפסילון.זה האפסילון שלי ותמורתו אתן לכם דלתא.הנה הדלתא שלי.ועכשו התור שלכם במשחק.בחרו X שמרחקו מ-A- קטן מדלתא ואני מבטיח לכם שאני בחרתי את הדלתא שלי שמרחקה מ-F מ-X ומ-L קטן מאפסילון. בדרך כלל זה יוצא שרטוט נאה מאד על הלוח עתה אני ממשיך את המשחק ואומר :אתם רשאים לשנות את אפסילון שלכם, אך בתמורה אני אשנה את הדלתא שלי.אח"כ אנו חוזרים על המשחק ועושים אותו עם פונקציות ספציפיות ואני מראה להם איזו דלתא בחרתי ברגע שהם מספקים לי את האפסילון.אני מאד גאה בהסבר הזה שלי, אם כי איני בטוח בסטודנטים...

מענין לציין שתמיד אני מופתע לגלות שרבים היו מעדיפים שלא אעשה זאת. אולם אני מלמד כך, כי אני סבור שהויזואליזציה עוזרת להבנה. ויזואליזציה היא שפה חדשה שיש ללמוד אותה ולא נוכל להניח שהסטודנטים כבר דוברים שפה זו. באשר לי ,אני רגיל אליה ונעזר בה ,אבל אם אינך רגיל לראיה הזאת אינך חושב שהיא תועיל לך.

אני בטוח שאני מסכים עם אלה הרוצים ללמד מתמטיקה ויזואלית כנושא בפני עצמו,כדי לא להפוך את המתמטיקה למשרתת של הויזואליזציה.זה חייב להיות ההפך!

אני בהחלט סבור כי כי אם אתה רוצה שויזואליזציה תעזור לתלמידיך,עליך ללמדם כיצד להשתמש בה.אל תצפה שרק בשל העובדה ששרטטת תרשים יפה זה יעזור למישהו .שפה זו יכולה להיות מאד, מאד שימושית ,אך עליך ללמוד כיצד להפכה לכזאת.

 **שאלות ותשובות**

 **שאלה** :כאשר אתה משתמש בדרך שהצגת לגבי גבולות ,אתה עושה זאת לגבי פונקציות ספציפיות?

בדרך כלל תלמידים שמבינים גבולות די טוב הבעיה נעוצה בסמליות.

**תשובה:** אכן כן ומשום כך הויזואליזציה חשובה לא רק במימד המרחב אלא גם במימד הזמן.הסדר מאד חשוב.אתה מבקש מהתלמיד קודם תן לי את האפסילון ואחר אספק לך את הדלתא..אבל הם עושים זאת קודם כל עם פונקציה של שורש ריבועי.

**שאלה**:עד כמה קרוב אתה מצפה מהם להגיע לערכו?

**תשובה**:כן, אני בהחלט מצפה מהם לספק לי את הערכים הנדרשים.

**שאלה**:מדוע אתה מתעקש כל כך על הגדרות פורמליות?.אני חש שהסטודנטים מסתדרים טוב יותר עם גרף.

**תשובה**:בקורס בניתוח שנה ראשונה באוניברסיטה הגדרות פורמליות חשובות ביותר ולכן אני מעניק להן משקל כה רב.

**שאלה**:אנו מדברים על מספרים מוגדרים ובלתי -מוגדרים.בדברנו על מספר מוגדר,התלמיד חושב על 1,2,3,,,,אך מספר אינסופי,מה מהותו?מוגדר או בלתי -מוגדר?

**תשובה:**אני סבור שאם הסטודנט אינו מבין את השינוי הדינמי של המספר ,הוא גם לא יוכל להבין גבולות.

**שאלה**:איך נוכל להקנות לתמידים את טכניקת הויזואליזציה בצורה יעילה?

**תשובתה של נורמה**:אני שמחה שאתה מעלה את אספקט ההוראה, כי לא הקציבו לי די זמן לכך בדברי הקודמים. במחקר שלי עבדתי עם 13 מורים שהתחלקו ל-3 קבוצות:אלה שלימדו בצורה ויזואלית ביותר,ואלה שעודדו ויזואליזציה בקרב תלמידיהם ,אך אולי הודו שאין זו הדרך הטובה ביותר.על הקבוצה השלישית נמנו אלה שהיו רחוקים ממיומנות זאת. נתקלתי אפילו במורה שלימד טריגונומטריה בלי לשרטט משולש.

הייתם חושבים שההוראה האופטימלית נעשתה לפי מחקרי ע"י מורים שהציגו כל נושא בצורה ויזואלית ועודדו את הסטודנטים לעשות כמותם בהתלהבות, אך לא כך היה הדבר.זה מה שחוקר היה מצפה לו, אבל הרי הפתעה המורים שאהבו להשתמש בויזואליזציה היו אלה שהתגברו על קשיים אישיים עם טכניקה זאת ,אבל לא היו מודעים לכך שהסטודנטים עדיין מתמודדים עם קשיים דומים. לכן המורים האופטימליים למתמטיקה היו אלה שעודדו ויזואליזציה, אבל גם הדגישו באזני תלמידיהם שהם זקוקים להגיון ואמרו: הרי לפניכם דרך שנטתה להפשטה והכללה, וזה בעצם מה שעזר למשתמשים בויזואליזציה להתגבר על הקשי שבקונקרטיזציה של חשיבה ויזואלית.

מיכל ירושלמי: אני מוסיפה את נקודת המבט שלי בהמשך לדבריה של רינה.פעם נהגנו להתייחס לויזואליזציה כאל ערוץ משני לפתרון בעיות,ייצוג והסמלה משניים בחשיבותם וככל שהתלמידים התקדמו בלימודי המתמטיקה בתיכון ובאוניברסיטה, הם העניקו פחות ופחות לגיטימיות לויזואליזציה. כל עוד זה המצב ,איננו מעודדים אף אחד. ברצוני להציג מספר בעיות שבאמצעות עזרים טכנולוגיים הדרך לפתרונם ברורה, אם כי ניתן לפתור אותם גם בלעדיהם.הדרך הטכנולוגית פשוט יותר בולטת לעין.

סימנם ויזואליים יכולים להוות את הערוץ הראשון של הבנת המתמטיקה ולא בהכרח ערוץ הסמלים שכן בשבילי סימנים ויזואליים גם הם סמלים.כלומר כל עוד אנו מתייחסים לכך כאל קטגוריה משנית ,לא נעודד את הסטודנטים להשתמש בויזואליזציה.מכאן יובן שחשיבותה של הויזואליזציה תקבע ע"י יחסו של המורה אליה והלגיטימיות שהוא מעניק לאמצעי זה.

להמחשת המתמטיקה בדרך זאת יש כמובן מגבלות ולמתמטיקה יש משנה תוקף כשאתה משתמש במשתנים ובאותיות ודוגמא לכך היא יכולתנו ליצור הכללות.מבחינה גרפית המקסימום שנוכל לעשות זה לחשוב בתלת-מימדיות.יותר מכך נבצר מאתנו לעשות. לכן ברור שזו מגבלה.נוכל לחשוב על פונקציה עם מספר בלתי מוגבל של משתנים כמימד, אך לא נוכל לחשוב על גרף עם מספר בלתי מוגבל של מימדים..כלומר יש כאן מגבלה.חשיבה והבנה אלה חייבים להיות לדעתי יסודות המתמטיקה.כשאתה מתקדם לשלבים גבוהים יותר של המתמטיקה, אכן אלה לא יספיקו :לא תוכל למשוך זאת לעד.

רינה הרשקוביץ:אינני רוצה להמשיך את דבריה של מיכל ,אלא להרחיב את הנקודה האחרונה שבה סיימתי את הרצאתי.הגיע הזמן להתייחס לויזואליזציה כאל בעלת חשיבות משל עצמה.כמובן אינני מתכוונת לטעון שיש ללמוד אותה כנושא לימודי מאחר והיא חייבת להיות קשורה לנושא המתמטי.מן הראוי שאנשים יצירתיים ומשכילים יתכנסו לניתוח מהותה וכוחה של הויזואליזציה בעידן הנוכחי.יש לבסס דרך ראיה זו על ההיגיון שבויזואליזציה שהוא היגיון בפני עצמו.אי אפשר להתחיל להחדיר ויזואליזציה כטכניקה חשובה רק בסטודנטים באוניברסיטה,התהליך חייב להיבנות הדרגתית בשיעורי מתמטיקה בביה"ס היסודי ובתיכון.

אני סלדון מאוניברסית מקסיקו בארה"ב

ברצוני לומר למתמטיקאים שאתנו שיש קבוצה פעילה מאד בארה"ב שעורכת מחקר בחינוך למתמטיקה לתואר ראשו ןוהם מקיימים כנס מדי פברואר .כמו כן ברצוני לציין בפני רז שישנה חוקרת מצוינת בעלת תואר שלישי במתמטיקה ושמה קיין הא רו והיא מתגוררת במדינת אריזונה. זמן רב הקדישה לחקר בעיה זו ויש באמתחתה תגלית המכונה "פעילות האפסילון" שהיא מציגה במחקר שלה יחד עם נושאים נוספים שהיא מלמדת בקורס ניתוח בשנת הלימודים השלישית למורי מתמטיקה באוניברסיטה.

לסיכום, ברצוני להדגיש שנעשים מחקרים שונים בנושא והמטרה היא להביאם לידיעת המתמטיקאים כדי שאלה לא יפעלו רק על פי האינטואיציה האישית שלהם ,אלא יוכלו להסתמך על מחקרים.ניתן אפילו להשיג ספרים על הנושא .גם אלנה כתבה ספר וכך עשה גם אלטק.כך אנו מנסים להגיע למתמטיקאים עם המחקרים שנעשים היום.

טומי

הייתי רוצה להצטרף לרעיון של נורמה שאי- נכונות של סטודנטים להשתמש בויזואליזציה תלויה בסביבתם התרבותית.היו לי תלמידים שהודו שהם לא היו מגישים את התשובה הויזואלית, כי המורה שלהם לא היה מקבל אותה.ואת חברי הפאנל הייתי רוצה לאתגר בשאלה באיזו מידה יש להפוך את הויזואליזציה לחלק מפורש מתוכנית הלימודים לאורך שנות הוראת המקצוע וכיצד ניתן להנחיל אותה לתלמידים?

נטלי

אני רוצה לציין את מחקריה של קיי או'הלרן שעשתה ניתוח רחב של השיח המתמטי ודנה לא רק בשפה אלא גם בדקדוק ובתחביר.אני סבורה שמחקרה מראה שעבודת חשיבה רבה מושקעת בהבנת דיאגרמה מתמטית ורינה כבר הציגה את השאלה מדוע תלמידים לא לומדים את הדקדוק והתחביר של דיאגרמות כדרך שהם לומדים את הדקדוק והתחביר של מתמטיקה כתובה.

ההנחה המקובלת בציבור היא שהשימוש בויזואליזציה הופך כל בעיה לשקופה וברורה ,אך אין זה נכון.ברוב המקרים התלמיד עדיין חייב לשקול היטב, למשל ,איך להציג את הצירים בדיאגרמה ועוד.

מיכל ירושלמי

קודם כל ,הייתי רוצה להתייחס לאתגר שהציב טומי איך להפוך ויזואליזציה לחלק ברור של תוכנית הלימודים. הדרך שלי להענות לאתגר היא ע"י חשיבה מחודשת על המתמטיקה שאנו מלמדים.לא יתכן שנמשיך לחשוב על אותה מתמטיקה ,אותם תכנים , אותה אלגברה ,או גיאומטריה,למשל. נעלה מכל ספק שעלינו לחשוב מחדש על הדרך לארגן אותה

לדוגמא, אתייחס לבעיות עבודה-הספק ,נושא מסורתי המופיע בכל חומר לימודים .כשאנו מארגנים מחדש את הבעיות באופן ויזואלי,אנו משנים למעשה את סדרי הקושי של הבעיות. אם עד כה חשבנו שבעיה 1 ,למשל, קלה מבעיה 10 מבחינת המשוואה המתמטית,הרי אחרי הארגון הויזואלי בעיה 8 עשויה להיות קלה מבעיה 2 ומחקרי אכן עסק בכך,כיון שהכל משתנה .זו אינה הוראה ישירה של ויזואליזציה אלא ארגון המתמטיקה על יסודות מבנים ואסטרטגיות ויזואליים.

כיון שזה נושא מורכב ,הייתי רוצה לחזור לכמה מההארות המצויות בספרות הפסיכולוגית. רבים מאתנו מכירים את רעיונותיו של ברנר המשרטטים התקדמות מחשיבה בלתי- פעילה לחשיבה אייקונית ומשם לחשיבה סימבולית,כאשר החשיבה הסימבולית מהווה פסגה.חשיבתם של ילדים קטנים היא בלתי –פעילה.החשיבה האייקונית היא ויזואלית.לבסוף אנו מסלקים את הויזואלי ונותרים עם הסמלים.

במחקרי יש ראיות ברורות שאין כאן התקדמות מדרגת החשיבה הנמוכה ביותר לגבוהה ביותר אלא שאלה מהווים אמצעים וסוגים שונים של חשיבה.למעשה גם בחשיבה הסימבולית תתכן חשיבה בלתי-פעילה

לידיעתכם, יש היום קבוצה גדולה של אנשים העובדים על חוסר -אקטיביזם בחינוך למתמטיקה. אנו גם יודעים שהחשיבה האייקונית מאד נוכחת בתהליך ההוכחה כי לסמלים עצמם יש צורה ויש לנו רצפים של סמלים.לא נוכל לאמר שהויזואליזציה מפנה את הדרך להכללה ולהפשטה.בארגון עצמו של סמלי ההכללה ניתן לגלות ויזואליזציה.כלומר ברצוני לציין שאנו דנים באופני חשיבה שונים וזאת בשונה מהתיאוריה הישנה של קסלם המניחה התפתחות באופני הייצוג.

הייתי רוצה גם להגיב על אספקט הזמן :לעיתים תהליך הויזואליזציה אורך יותר זמן מאשר תהליך השימוש בסמלים.למעשה זה אחד הדברים שהדאיג אותי במבחן הויזואליזציה של עמיתי למקצוע, גרייסון.הוא ערך מבחן תלוי- זמן. קבלת ניקוד גבוה יותר, אם יכולת לחשוב ויזואלית במהירות.אבל לי לא נראה שגורם הזמן משחק כאן תפקיד חשוב ,שכן לויזואליזציה יש תפקיד שונה.לפעמים היא מסוגלת להעניק תובנות שסמליות לא יכולה לתת.

כולנו בודאי התנסינו בתחושות בטן מסוימות לגבי דברים שונים בהתבסס על נסיון העבר שלנו וזה יכול להיות ענין ויזואלי.כך שלמעשה אינני מעמידה הגיון והוכחה כנגד הויזואליזציה.לדעתי הפתרון הטוב ביותר הוא השילוב בין שניהם,לפעמים לחילופין ולפעמים ביחד אבל חשוב לנצל את שני הכוחות האלה.

באשר לגיאומטריה דינמית, היה לי פעם סטודנט במדינת אילינוי בשם פול יו שעבד עם תלמידי חטיבת- ביניים על מה שמכונה "יוצרי הצורה".זאת תוכנת מחשב שמתחילה עם מרובע כלשהוא.הסטודנטים מזיזים אותו בכיוונים שונים וכך מקבלים צורות שונות ובודקים את תכונותיהם של כל המצולעים שקבלו.המחקר של "יוצרי צורה" הוכיח בברור אורח חשיבה שונה בקרב הסטודנטים.בסביבה זו עפיפון הוא מה ש,יוצר הצורות "יצר.אמרתי זאת כדי להביע את תמיכתי במחקר שנעשה בגיאומטריה דינמית באמצעות המחשב.

ג'רי גולדן

בהמשך לדברים שנאמרו ,אני סבור שחשוב לשים לב ליחסי הייצוג בין דימויים פנימיים וחיצוניים ובין האסכולה האימג'יסטית של ויז'ואלס והחשיבה ההגיונית. לגבי אין זו כלל שאלה של בחירה בין זה לזה אלא של שילוב שניהם גם יחד.

כשאנו מתבוננים באופן שבו סטודנטים מפרשים יצוגים ויזואליים,נראה שהם מסתמכים על אותה פרשנות הרווחת בקהילה.המתמטית והם שואבים רעיונות משתי הגישות.ושוב אני רוצה לאשר את דבריה של נורמה שהדברים קורים באינטראקציה.זהו תהליך שבו ישנה פרשנות רבה,ניתוח דברים ויזואליים בצורה סמלית וסמלים בצורה ויזואלית.כשלעצמי, איני רואה מדוע לא יוכל החוזה הדידקטי לכלול את התפתחותן של כל שיטות הייצוג האלה.

לבסוף ,אני סבור שעלינו לציין את עבודותיו של ג'ים קפוט (שאת חלק מחקריו המשיך סטיב הגדס.)חוקרים אלה עשו רבות לפיתוח הרעיון של מערכות ייצוג דינמיות חיצוניות ועד כמה ניתן להגמיש אותן כדי להפכן לכלי ויזואליזציה פנימית של הסטודנט ולמחשבה לוגית פנימית.

מיכל

ברצוני להתייחס לייצוג דינמי באמצעות דוגמא פשוטהמאד החביבה עלי משל יהודה שוורץ המופיעה בגיאוגברה. השאלה שנשאלת היא :האם זה מופיע קודם כסמלי ואחר גרפי כפי שזה היה עד כה ,או שניתן להניח שהדבר השתנה?

הרעיון הוא שאני יכולה לשנות בצורה גרפית וליצור משוואות שונות ולא לשנות את הפרמטרים המספריים והסימבוליים. (מדגימה על הלוח) :אנימשנה עתה רק צד אחד של המשוואה בלי לגעת בצד השני ועדיין שומרת על אותו פתרון.כלומר אני יוצרת באופן גרפי קבוצה של משוואות בעלות אותו פתרון. אך בשונה ממה שנהגנו ללמד בביה"ס, אינני משנה את שני הצדדים ,אלא רק צד אחד. המשמעות היא שבאורח גרפי יש לי סוג חדש של פעולות כדי ליצור משואות שוות.

רציתי להראות כאן כי איני יכולה להכנס לכיתה רגילה,לפתור בעיות בצורה סימבולית ולבקש מהתלמידים בלי כל הכנה מוקדמת לפתור אותן בצורה ויזואלית.זאת שפה שונה,זה חייב לקחת זמן ויש לשנות את סוג השאלות.

בוריס מהטכניון

הייתי רוצה להציג תפקידים שונים שהויזואליזציה ממלאת במתמטיקה .הן במליאה והן בצוות הדיון הודגש כי תפקיד הויזואליזציה להקל על העומס הקוגניטיבי ,אבל לדעתי יש למקצוע תפקידים נוספים.בשבילי דוגמא פרדיגמית היא הבעיה הידועה של אוילר על 7 הגשרים. בהתחלה הבעיה מאד ויזואלית והפתרון באמצעי ויזואלי של גרף. ויש הבדל גדול ביותר בין 2 תמונות אלה.כדי לייצר גרף לפתרון בעית הגשרים נדרשת רמה גבוהה יותר של חשיבה מופשטת ובחירת אלמנטים רלבנטיים שאמורים להיות משולבים ברמה הבאה של המחשת הבעיה. לפיכך הייתי מבקש מכם לחשוב בקול רם אם אפשר,האם יש מקום גם לסוגי ויזואליזציה כאלה בהוראת מתמטיקה בבית הספר או באוניברסיטה.נורמה אומרת שאכן יש מקום.

רז

במהלך הדיון הזה החלה מטרידה אותי המחשבה מה המטרה שלנו כמתמטיקאים? הן מטרתנו היא להוכיח מעל לכל ספק שמשהו נכון. יתר על כן, חלק ממה שנדרש מאדם כדי להופכו למתמטיקאי הוא ארסנל מלא בכלים רבים ככל האפשר.אני מניח שיש בקהל הסכמה כללית שויזואליזציה נמנית על כלים אלה.ואם היא יכולה לסייע, מן הראוי לפתח אותה.אך ויזואליזציה אינה דבר הקיים בזכת עצמו :זהו כלי בו אנו יכולים להשתמש, כדי להוכיח שמשהו נכון.

איזי ויינצוייג מאוניברסיטת אילינוי,שיקגו

בראשית דברי אודה לרינה שהציעה לי דרכים נוספות לפתרון הבעיה.לי היו כחצי תריסר פתרונות וחשבתי שאין יותר ,אבל היא העלתה נוספים...רעיון ההוכחה מטריד ביותר לעיתים קרובות.פעם בהרצאה לפני תלמידי תיכון ,שבה הוכחתי תיאוריה מסוימת,הצגתי גוף מרובה- צלעות שהרכבתי ואחר פרקתי.חשבתי לתומי שזאת הוכחה מבריקה.בתום ההרצאה ניגש אלי סטודנט ואמר שזה היה יפה מאד, מאד ,אבל איך אני יכול להוכיח זאת ואז עניתי לו שכל מתמטיקאי יכול לקחת מה שסיימתי לטעון זה עתה ולכתוב הוכחה פורמלית !

הערתי השניה מתייחסת לרז :התלמידים בכיתה מקבלים בדרך כלל הרבה דוגמאות אבל לעיתים נדירות יקבלו דוגמאות- נגד שהן חשובות מאד כשלעצמן.

 את הדיסרטציה שלי עשיתי עם חוקר שהיה מחלוצי המחקר בטופולוגיה (המצאות 2 פונקציות רציפות באותו מרחב טופולוגי) והוא נהג לומר לי "אינני יכול להבין אלא אם כן יש לי תמונה".והוא נהג ליצור תמונות מהמושגים המופשטים ביותר במתמטיקה.היו אלה תמונות שהוא יכול היה לראות ולהעביר לזולת .הם באמת העשירו את ההבנה.לכן, אני סבור שיש לכך תפקיד בהוראת המתמטיקה.

ניצה מובשוביץ המטכניון

הייתי רוצה להוסיף את תמיכתי האיתנה בדברי מיכל ולהוסיף לדברי רז:מה שניסית לעשות זה לתת להם את ההגדרה המופשטת של המשכיות ,למשל,ואז הצגת להם את המשחק של "תנו לי את האפסילון ואתן לכם את דלתא" וכו'.אם עקבת אחרי דברי מיכל ,נוכל לומר שאילו התחלת להסביר באופן איכותי עם משהו דינמי (לא עם תמונות סטילס) את המושג האינטואיטיבי של המשכיות ומראה קודם באופן איכותי ואחר באופן כמותי את התהליך של אפסילון ודלתא ואז מגיע להגדרה,במצב זה היית בונה את ההגדרה יחד עם התלמידים ולא כופה אותה עליהם. כיון שלא נהגת בצורה זו ,נאלצת בשל כך להסביר את ההגדרה באופן ויזואלי ולא זאת הכוונה במתמטיקה. ויזואלית .תפקידה האמיתי של המתמטיקה הוא להשתמש בויזואלי כדי לבנות עליו את הקונספט.

איזי נתן לנו אתמול דוגמא נהדרת (כלל לא ויזואלית) של סביבה שבה יש לך הזדמנות נפלאה להוכיח הוכחה בלתי קיימת לגמרי ב-H11.זה מה שהכלים ויזואליים שברשותנו מאפשרים לנו לעשות.

לואיס

לדעתי עלינו לעשות הבחנה בין ויזואליזציה לויזואליזציה מתמטית.כאן אנו מעוניינים בויזואליזציה מתמטית.כדי שמשהוא יהיה ויזואלי מתמטית, הוא חייב להיות בעל משמעות מתמטית.ברצוני לגעת במשחק ההדדי הנפלא, עליו דברה רינה ,בין ויזואליזציה לבין הסמלי.ויזואליזציה מתמטית זה לא משהו שיש או אין לנו.עלינו ללמוד איך לראות דברים באופן מתמטי וזה קשור לסמלי ובכן 2 פונקציות אלה הויזואלי והסמלי אינן נפרדות. הן אינן מתפתחות בהיותן נפרדות זו מזו וכאן נכנס אלמנט נוסף- שפה ,דבר ההופך את התשלובת הזאת למשהו מורכב בהרבה ממה שנראה ממבט ראשון.

תודה לכל משתתפי הכנס.