בס"ד

מקצוע : הסתברות למדעי המחשב
מס' קורס : 20112391
המרצה: דניאל ברנד
לובה ספיר
מועד ב': כ"ח אדר א' ה'תשע"ד
28/2/2014
משך המבחן: 3 שעות
חמר עזר: ללא הגבלה, אך ללא מחשבון

הנחיות: ענה על סעיפי המבחן. כל הסעיפים שווי משקל, ויבחרו 15 הסעיפים בעלי הניקוד הגבוה ביותר. בכל סעיף 5 טענות, מהן בדיוק אחת נכונה. בכל סעיף בפני עצמו עליך לבחור באחת משתי האפשרויות:

1. לענות על הסעיף, ע"י כתיבת מספר הטענה הנכונה במקום המתאים בדף תשובות זה.
2. לוותר על הסעיף.

הניקוד: תשובה נכונה עבור כל סעיף מזכה ב- $6\frac{2}{3}$ נקודות, תשובה שגויה – ב-0 נקודות, ויתור – ב- $1\frac{2}{3}$ נקודות, כל סימון אחר (כגון שתי טענות או טענה וויתור) – ב-0 נקודות.

התשובות:

שאלה 1	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	3	
ב.	4	
ג.	2	
ד.	2	
ה.	3	

שאלה 2	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	3	
ב.	4	
ג.	3	

שאלה 3	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	3	
ב.	2	
ג.	2	
ד.	3	
ה.	3	
ו.	2	

שאלה 4	מספר הטענה הנכונה	ויתור על הסעיף
א.	3	
ב.	3	
ג.	3	
ד.	1	

שים לב: רק דף זה יילקח בתום המבחן. את דפי השאלות תוכל לקחת.

ב ה צ ל ח ה !

<u>שאלה 1:</u>

כד מכיל n כדורים, הממוספרים ב-$1,2,3,\ldots,n$. מוציאים את הכדורים מהכד אחד אחר השני ללא החזרה, באופן אקראי, כדלהלן: בשלב הראשון, מוציאים כדור אחר כדור, עד שיוצא כדור מס׳ 1. בשלב השני, הוצאת הכדורים נמשכת עד שיוצא הכדור שמספרו הנמוך ביותר מבין אלה שנותרו לאחר השלב הראשון. בשלב השלישי – עד שיוצא הכדור שמספרו הנמוך ביותר מבין אלה שנותרו לאחר שני השלבים הראשונים, וכך הלאה. עבור $1 \le i \le n$, נסמן ב-A_i את המאורע שהכדור שמספרו i יצא אחרון באחד מהשלבים. עבור $1 \le j \le n$, נסמן ב-X_j את מספר הכדורים שהוצאו בשלב שמספרו j (אם התהליך לא הסתיים קודם; אם הסתיים – $X_j = 0$). נסמן ב-T את מספר השלבים עד שהתהליך הסתיים. (לדוגמא, נניח ש-$n = 10$, הכדורים שהוצאו (משמאל לימין) בשלב הראשון הינם $5,8,2,3,1$, בשלב השני – $10,4$, ובשלישי – $9,7,6$. אזי A_1, A_4, A_6 קרו, בעוד $A_2, A_3, A_5, A_7, A_8, A_9, A_{10}$ לא; $X_1 = 5, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = X_{10} = 0$, ו-$T = 3$.)

א. עבור $1 \le i \le n$, הרי $P(A_i) =$

א.1. $\frac{1}{i!}$.

א.2. $\frac{1}{2^{i-1}}$.

א.3. $\frac{1}{i}$.

א.4. $\frac{1}{2}$.

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ב. $V(X_1)$ **הינו**

ב.1. שווה ל- $\frac{n}{4}$ **עבור כל** n.

ב.2. בערך $e \cdot n$ **עבור** n **מספיק גדול.**

ב.3. בערך $\pi \cdot n$ **עבור** n **מספיק גדול.**

ב.4. שווה ל- $\frac{n^2-1}{12}$ **עבור כל** n.

ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ג. **עבור** $1 \le k \le n-1$**, נקבל כי** $P(X_2 = k) =$

ג.1. $\frac{1}{n}\sum_{r=k+1}^{n-1}\frac{1}{r}$.

ג.2. $\frac{1}{n}\sum_{r=k}^{n-1}\frac{1}{r}$.

ג.3. $\frac{1}{n}\sum_{r=k+1}^{n}\frac{1}{r}$.

ג.4. $\frac{1}{n}\sum_{r=k}^{n}\frac{1}{r}$.

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ד. $E(T \mid X_1 = n-2) =$

ד.1. 2.

ד.2. $\frac{5}{2}$.

ד.3. 3.

ד.4. $\frac{7}{2}$.

ד.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ה. כאשר $n \to \infty$ **הרי**

ה.1. $E(T)$ **חסומה מלעיל, אך אינה מתכנסת.**

ה.2. $E(T)$ **מתכנסת לגבול סופי.**

ה.3. $E(T) \to \infty$**, אך** $\frac{E(T)}{n} \to 0$.

ה.4. $\frac{E(T)}{n} \to \alpha$**, באשר** $0 < \alpha < 1$.

ה.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

<u>שאלה 2</u>

בשאלה זו אנו דנים בגרסא לבעיית התור בקולנוע, כדלהלן: בתחילת התהליך, לקופאי אין כסף כלל. כרטיס עולה 50 ₪. במרוצת הזמן, מספר אינסופי של אנשים יגיע. כל אחד מהם יתן לקופאי בהסתברות $\frac{3}{4}$ שטר של 50 ₪, ובהסתברות $\frac{1}{4}$ שטר של 100 ₪.

א. יהי Y מספר האנשים, מבין 1000 הראשונים שיגיעו, שיתן לקופאי שטר של 100 ₪, ו- Z מספר האנשים מקבוצה זו שיתן לקופאי שטר של 50 ₪. אזי $P(Z-Y=200)=$

א.1. $\binom{1000}{200}\frac{3^{200}}{4^{1000}}$.

א.2. $\binom{1000}{400}\frac{3^{400}}{4^{1000}}$.

א.3. $\binom{1000}{600}\frac{3^{600}}{4^{1000}}$.

א.4. $\binom{1000}{800}\frac{3^{800}}{4^{1000}}$.

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ב. יהי T משתנה מקרי בדיד מפולג אחיד, $T\sim U[1,\ 199]$. יהי X מספר האנשים, מבין T הראשונים שיגיעו, שיתן לקופאי שטר של 100 ₪. אזי $\rho(T,X)=$

ב.1. $\sqrt{\frac{1}{12}}$.

ב.2. $\sqrt{\frac{5}{12}}$.

ב.3. $\sqrt{\frac{7}{12}}$.

ב.4. $\sqrt{\frac{11}{12}}$.

ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ג. ההסתברות שהקופאי לא יקבל לעולם שטר בן 100 ₪ במצב בו אין לו שטרות של 50 ₪ בקופה הינה

ג.1. $\frac{5}{12}$.

ג.2. $\frac{1}{2}$.

ג.3. $\frac{2}{3}$.

ג.4. $\frac{3}{4}$.

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

שאלה 3

נתונים מ"מ ב"ת $X_i \sim Exp(1),\quad 1 \le i \le 100$ **. נגדיר משתנים מקריים** $Y = \max(X_1, X_2)$**,** $T = \min(X_1, X_2)$ **ו-** $W = e^{-X_1}$.

א. שימוש ישיר באי-שוויון מרקוב מראה כי האי-שוויון $P(Y \ge a) \le 0.01$ **מתקיים עבור** $a \ge$

א.1. 100.

א.2. 120.

א.3. 150.

א.4. 180.

א.5. אף לא אחד מהנ"ל.

הערה: הכוונה כאן לתוצאה הטובה ביותר שניתן להשיג. לדוגמא, אם מאי-שוויון מרקוב נובע כי $P(Y \ge a) \le 0.01$ **עבור** $a \ge 100$ **, אזי הוא לבטח נכון עבור כל שאר האפשרויות, אך עליך לציין רק את א.1 כתשובה הנכונה.**

רמז: חשב את פונקצית ההתפלגות של Y.

ב. T **מתפלג**

ב.1. $Exp\left(\frac{1}{2}\right)$.

ב.2. $Exp(2)$.

ב.3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

ב.4. $\Gamma(2,2)$.

ב.5. אף לא אחד מהנ"ל.

ג. המשתנה המקרי W

ג.1. מתפלג $N(0,1)$.

ג.2. מתפלג $U(0,1)$.

ג.3. הינו בעל פונקציה צפיפות $f_W(t) = \begin{cases} 3t^2, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

ג.4. הינו בעל פונקציה צפיפות $f_W(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & 1 \le t \le e, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

ג.5. אף לא אחד מהנ"ל.

ד. $V(X_1 \cdot X_2) =$

ד.1. 1.

ד.2. 2.

ד.3. 3.

ד.4. 4.

ד.5. **אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

ה. $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i^2 \le 200\right) \approx$

ה.1. 0.

ה.2. 0.25.

ה.3. 0.5.

ה.4. 1.

ה.5. **אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

ו. $\rho(X_1, W) =$

ו.1. -1.

ו.2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ו.3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ו.4. $-\frac{1}{2}$.

ו.5. **אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

<u>שאלה 4</u>

(X,Y) הינו מ"מ בעל פונקצית צפיפות משותפת

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, \\ c, & -1\le x<0,\ -1\le y<0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור קבוע מתאים $c>0$. אזי

א. $P\left(X^2+Y^2\le 1\right)=$

א.1. $\frac{1}{8}\pi$.

א.2. $\frac{1}{6}\pi$.

א.3. $\frac{1}{4}\pi$.

א.4. $\frac{1}{2}\pi$.

א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ב. המשתנים המקריים X ו- Y הינם

ב.1. בלתי-תלויים.

ב.2. תלויים אך בלתי-מתואמים.

ב.3. מתואמים חיובית (כלומר, $Cov(X,Y)>0$).

ב.4. מתואמים שלילית (כלומר, $Cov(X,Y)<0$).

ב.5. $Cov(X,Y)$ אינה קיימת.

ג. $V(Y)=$

ג.1. $\frac{1}{12}$.

ג.2. $\frac{1}{4}$.

ג.3. $\frac{1}{3}$.

ג.4. $\frac{1}{2}$.

ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

ד. נסמן $Z=\max(X,Y)$ **. אזי עבור** $0\le t\le 1$

ד.1. $F_Z(t)=\frac{1}{2}+\frac{t^2}{2}$.

ד.2. $F_Z(t)=\frac{t^2}{2}$.

ד.3. $F_Z(t)=\frac{3}{4}+\frac{t^2}{4}$.

ד.4. $F_Z(t)=t^2$.

ד.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

בהצלחה!