

תרגול 12-13

1. יהיו X ו- Y משתנים מקריים בעלי פונקציית צפיפות משותפת:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(א) מצא את C

(ב) נסמן במשתנה מקרי D את המרחק מן נקודה מקרית (X, Y) לראשית הצירים. חשב $E(D)$

2. $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$, ובלתי תלויים. הוכח: $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3. מספר המכונות הנמכרות בשבוע בסוכנות מסוימת הינו מ"מ בעל תוחלת 16. מצא חסם מלעיל להסתברות שבשבוע ימכרו בסוכנות זו יותר מ-18 מכונות?

4. נתון ש- $X \geq 0$ ו- $P(X \geq 10) = \frac{1}{5}$. הוכח כי $E(X) \geq 2$.

5. יהיו $E(X) = E(Y) = 75$ ו- $\text{cov}(X, Y) = -3$, $V(X) = 10$, $V(Y) = 12$. מצא חסם מלעיל ל- $P(|X - Y| \geq 15)$.

6. דוגמים n פעמים מ"מ בעל פונק' התפלגות התלויה ב-2 פרמטרים: התוחלת μ שאיננה ידועה והשונות $\sigma^2 = 1$. נסמן ב- X_i את המשתנה המקרי המתאים לדגימה ה- i -ית, $i = 1..n$. נגדיר את המשתנה המקרי $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. מהו גודל n כך ש- $P(|\bar{X}_n - \mu| < 0.5) \geq 0.95$?

7. יהיו X_1, X_2 מ"מ ב"ת בעלי התפלגויות $X_1 \sim B(n, p)$ ו- $X_2 \sim B(n, q)$. חשב

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X - 5Y - n(p - 5q)| \geq 0.1n)$$

8. קוטר של חלק המיוצר על ידי מכונה הינו מ"מ X בעל התפלגות נורמאלית עם $\mu = 10$ ו- $\sigma = 0.1$ סנטימטר. לפי צו תקן החלק הינו תקין אם $9.9 < X < 10.2$. מהו הסיכוי לחלק להיות תקין? מצא את t כך ש- $P(X \leq t) = 0.75$.

9. יהיו X_1, X_2, \dots, X_{100} מ"מ רציפים ב"ת בעלי התפלגות זהה, תוחלת $\mu = 3$ ושונות $\sigma^2 = 64$. נגדיר את המשתנה המקרי $\bar{X}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$. מצא, בקירוב, את $P(\bar{X}_{100} \geq 2)$.

10. ההסתברות כי יחידה מסוימת פגומה הינה 0.01. נבדקות 1000 יחידות. נסמן ב- Y את מספר היחידות הפגומות. מצא קירוב ל- $P(Y \leq 15)$. בצע תקון רציפות.

11. משקל ביצה מפולג נורמאלית עם תוחלת 60 גרם וסטית תקן 10 גרם. ביצה שמשקלה מתחת ל-55 גרם מסווגת כביצה מס' 3. ביום מסוים נאספו בלול 100 ביצים. מצא בקירוב את ההסתברות שנוכל למלא תבנית אחת לפחות של ביצים מס' 3, כאשר בתבנית ישנן 30 תאים.

12. מטילים מטבע הוגנת. יש לחשב את מספר ההטלות המינימלי n כך שאחוז העצים ב- n ההטלות יהיה בין 40% ל-60% בהסתברות 0.7 לפחות.
א. לפי משפט הגבול המרכזי.
ב. לפי אי-שוויון צ'בישב.

13. בעזרת פונקצית יוצרת המומנטים הוכח שאם $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$ כאשר X, Y מ"מ ב"ת, אז $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

14. המספר (במיליונים) של סביונים הצומחים מדי שנה באזור מסוים מפולג (בערך) לפי פונקצית הצפיפות f_X .

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

נסמן ב- ψ את הפונקציה יוצרת המומנטים של X .

$$\psi(0.001) \approx \text{אזי}$$

$$1 + \frac{1}{8000} \quad (\text{א})$$

$$1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2000} \quad (\text{ב})$$

$$1 + \frac{1}{1000e} \quad (\text{ג})$$

$$1 + \frac{\ln 2}{500} \quad (\text{ד})$$

15. אם X משתנה מקרי סימטרי סביב 0 ובעל פונקציית יוצרת המומנטים $\psi_x(t)$, הוכח כי פונקציית יוצרת המומנטים הינה פונקציה זוגית.

16. האם הטענה הבאה נכונה:

אם פונקציית יוצרת המומנטים של מ"מ X היא $\psi_x(t) = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2}$ אז

$$P(-1 \leq X \leq 1) \geq \frac{1}{9}$$

17. האם יכול להיות כי פונקציית יוצרת המומנטים של מ"מ X שווה ל:

א. $(t-1)^5$

ב. $\cos(t)$