

תרגול 10

1. נתונה פונקצית הצפיפות של המ"מ X :

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{3}{t^4}, & t \geq 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

נגדיר $Y = \frac{1}{X}$. מצא את:

- א. $V(X)$, $E(X)$.
- ב. $F_Y(t)$.
- ג. $V(Y)$, $E(Y)$.

2. נתון מ"מ בעל פונקצית הצפיפות

$$f_x(x) = \begin{cases} c(a+x), & -a \leq x \leq 0, \\ c(a-x), & 0 < x \leq a, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר $a > 0$. חשב את $V(X), E(X), c$.

3. נתון מ"מ בעל פונקצית הצפיפות

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}(2e^{-x} + 3e^{-2x}), & x > 0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את $V(X)$.

4. נתון מ"מ $X \sim U(0,1)$. נגדיר מ"מ $a \neq 0$, $Y = aX + b$.
חשב את $V(Y), E(Y)$.

5. נתון מ"מ $X \sim \bar{B}(r, p)$.
חשב את $V(X)$.

6. הוכח: $E((X - c)^2) \geq V(X), \forall c$.

6. $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$, ובלתי תלויים. הוכח: $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

7. בכד יש שלושה כדורים: אחד לבן, אחד שחור ואחד אדום. שלושה אנשים בוחרים כדור אחד בזה אחר זה עם החזרה. נסמן ב- X את מספר הצבעים השונים בכדורים שנבחרו וב- Y את מספר האנשים שבחרו כדור לבן. מצא את:

(א) פונקציית ההסתברות המשותפת של X, Y .

(ב) פונקציית ההסתברות של $Z = X - Y$.

(ג) $P(X + Y \leq 3 | X - Y \geq 1)$.

(ד) פונקציית ההסתברות השולית של X .

(ה) $COV(X, Y)$.

(ו) $V(X)$.

(ז) האם X, Y בלתי תלויים.

8. (א) אורכי החיים (בשעות) של נורות מסוג A ומסוג B הינם משתנים מקריים המפולגים $Exp(1)$ ו- $Exp(1/2)$, בהתאמה. מדליקים נורה מסוג A, וכאשר היא נשרפת מדליקים נורה מסוג B. נסמן ב- T את משך הזמן החל ברגע הדלקת הנורה הראשונה וכלה ברגע בו השניה נשרפת. מצא את: $E(T)$, $V(T)$.

(ב) כעת נניח כי מאירים חדר אחד באמצעות נורה מסוג A, וכאשר היא נשרפת מחליפים אותה בשתי נורות מסוג B במקביל. נסמן את הנורות מסוג B ב- B_1 וב- B_2 . נסמן ב- T^* את הזמן מתחילת הניסוי עד אשר B_1 נשרפת, וב- T^{**} את הזמן מתחילת הניסוי עד אשר B_2 נשרפת. (לדוגמא, אם הנורה הראשונה נשרפת לאחר שעה, B_1 נשרפת 6 שעות לאחר הדלקתה ו- B_2 4 שעות לאחר הדלקתה, אז $T^* = 7, T^{**} = 5$). מצא:

1. $V(T^{**}), V(T^*)$

2. $\rho(T^{**}, T^*)$