

**תרגול 11-10**

1. נתונה פונקצית הצפיפות של המ"מ  $X$ :

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{3}{t^4}, & t \geq 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

נגדיר  $Y = \frac{1}{X}$ . מצא את:

- א.  $V(X), E(X)$ .
- ב.  $F_Y(t)$ .
- ג.  $V(Y), E(Y)$ .

2. נתון מ"מ בעל פונקצית הצפיפות

$$f_x(x) = \begin{cases} c(a+x), & -a \leq x \leq 0, \\ c(a-x), & 0 < x \leq a, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר  $a > 0$ . חשב את  $V(X), E(X), c$ .

3. נתון מ"מ בעל פונקצית הצפיפות

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}(2e^{-x} + 3e^{-2x}), & x > 0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את  $V(X)$ .

4. נתון מ"מ  $X \sim U(0,1)$ . נגדיר מ"מ  $Y = aX + b$ ,  $a \neq 0$ . חשב את  $V(Y), E(Y)$ .

5. נתון מ"מ  $X \sim \bar{B}(r, p)$ . חשב את  $V(X)$ .

6. הוכח:  $E((X - c)^2) \geq V(X), \forall c$ .

6.  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ , ובלתי תלויים. הוכח:  $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

7. בכד יש שלושה כדורים: אחד לבן, אחד שחור ואחד אדום. שלושה אנשים בוחרים כדור אחד בזה אחר זה עם החזרה. נסמן ב- $X$  את מספר הצבעים השונים בכדורים שנבחרו וב- $Y$  את מספר האנשים שבחרו כדור לבן. מצא את:

(א) פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X, Y$ .

(ב) פונקציית ההסתברות של  $Z = X - Y$ .

(ג)  $P(X + Y \leq 3 | X - Y \geq 1)$ .

(ד) פונקציית ההסתברות השולית של  $X$ .

(ה)  $COV(X, Y)$ .

(ו)  $V(X)$ .

(ז) האם  $X, Y$  בלתי תלויים.

8. (א) אורכי החיים (בשעות) של נורות מסוג A ומסוג B הינם משתנים מקריים המפולגים  $Exp(1)$  ו- $Exp(1/2)$ , בהתאמה. מדליקים נורה מסוג A, וכאשר היא נשרפת מדליקים נורה מסוג B. נסמן ב- $T$  את משך הזמן החל ברגע הדלקת הנורה הראשונה וכלה ברגע בו השניה נשרפת. מצא את:  $E(T)$ ,  $V(T)$ .

(ב) כעת נניח כי מאירים חדר אחד באמצעות נורה מסוג A, וכאשר היא נשרפת מחליפים אותה בשתי נורות מסוג B במקביל. נסמן את הנורות מסוג B ב- $B_1$  וב- $B_2$ . נסמן ב- $T^*$  את הזמן מתחילת הניסוי עד אשר  $B_1$  נשרפת, וב- $T^{**}$  את הזמן מתחילת הניסוי עד אשר  $B_2$  נשרפת. (לדוגמא, אם הנורה הראשונה נשרפת לאחר שעה,  $B_1$  נשרפת 6 שעות לאחר הדלקתה ו- $B_2$  4 שעות לאחר הדלקתה, אז  $T^* = 7, T^{**} = 5$ ). מצא:

1.  $V(T^{**}), V(T^*)$

2.  $\rho(T^{**}, T^*)$

9. מטילים זוג קוביות הוגנות פעמיים. יהי  $X$  מספר הפעמים בהן סכום התוצאות לפחות 10 בהטלה הראשונה של זוג הקוביות. יהי  $Y$  מספר הפעמים בהן סכום התוצאות לפחות 10 בשתי ההטלות. היאם:

- א.  $\rho(X, Y) = 0.5$
- ב.  $P(X < Y) = 1/6$
- ג.  $Y \sim U[0, 2]$
- ד.  $X, Y$  בלתי תלויים.
- ה.  $Y = aX + b$  עבור  $a > 0$ .

10. יהיו  $X, Y$  מ"מ בעלי צפיפות משותפת

$$f_{X, Y}(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא:

א)  $c$

ב) האם  $X, Y$  בלתי תלויים?

ג)  $Cov(X, Y)$

ד)  $Cov(X - Y, X + Y)$

ה)  $V(X + Y)$

ו)  $P(X + Y \leq 1/3)$

ז) פונקציה צפיפות של  $Y + X$

11. מ"מ מפולג אחיד על המשולש המתקבל על ידי הישרים  $y = 1 - x$ ,  $y = 1 + x$  וציר  $X$ .

א. פונקציית הצפיפות השולית של  $X$  ו- $Y$ .

ב. היאם  $X, Y$  בלתי תלויים.

ג. חשב  $\rho(X, Y)$

12. יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים בעלי פונקציית צפיפות משותפת:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(א) מצא את  $C$

(ב) נסמן במשתנה מקרי  $D$  את המרחק מן נקודה מקרית  $(X, Y)$  לראשית הצירים. חשב  $E(D)$

13. יהי  $X$  מספר התוצאות הזוגיות ב- $n$  הטלות של קוביה, ויהי  $Y$  סכום התוצאות באותן הטלות. מצא את  $\rho(X, Y)$ .