

תרגול 9-10

1. אדם משתתף בהגרלה בה הוא יכול להרוויח או להפסיד סכום כסף מסוים. נסמן את הרווח הכספי של האדם במשתנה מקרי X , כך ש: $X = (-1)^k (k+1)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. בהסתברות $P(x_k) = \frac{1}{k(k+1)}$. מצא את התוחלת של X , אם היא קיימת.

2. נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי X : $f(x) = a \cdot |x| \cdot e^{-x^2}$. מצא את a .

3. נתונים משתנים מקריים $Y_i \sim Exp(\lambda)$, $i = 1 \dots m$. נתון $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$, מצא את התוחלת של X .

4. יהי X משתנה מקרי בעל התפלגות גמא, כך שפונקציית הצפיפות שלו היא: $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$, $x > 0$, כאשר $\lambda, \alpha > 0$. $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. מצא את התוחלת של X .

5. תהי A נקודה הנבחרת באופן מקרי ואחיד בקטע $[0, 1]$, ומחלקת אותו לשני חלקים: $[0, A]$ ו- $[A, 1]$. נסמן את אורך החלק הקטן ב- X . מצא את פונקציית הצפיפות של X .

6. אורך חיי מנוע (בשעות) מפולג מעריכית עם פרמטר λ . M מנועים דלוקים במשך $\frac{1}{\lambda}$ שעות. מצא את ההסתברות שאף מנוע לא יתקלקל (בהנחה שכל מנוע עובד ללא תלות באחרים).

7. נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X : $f_x(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq 1 \\ b, & 1 < t \leq 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

כאשר a ו- b הינם קבועים. נתון $E[X] = 1.5$.

א. חשב את a ואת b .

ב. חשב את פונקציית ההתפלגות $F_x(t)$.

ג. חשב את $P(0.5 < X \leq 2 | X > 1)$.

8. נתונה פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי הרציף X :

$$f_x(t) = \begin{cases} a(2e^{-t} + 3e^{-2t}), & t \geq 0, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצא את a ואת התוחלת של X .

9. אריזה מכילה אלף רכיבים אלקטרוניים. פגם יכול להופיע בכל רכיב בהסתברות 0.005 (חמש אלפיות). מצא את ההסתברות שבאריזה יש בדיוק שלושה רכיבים פגומים.

10. נתון מ"מ $X \sim Exp(\lambda)$. מצא את פונקציית ההתפלגות של $Y = \lfloor X \rfloor$.

11. פונקציית הצפיפות של מ"מ הינה $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{x^2}{1+x^4}$, $-\infty < x < \infty$. מצא את תוחלת X , אם ישנה.

12. נניח ש- X הוא משתנה מקרי אשר מפולג מעריכית עם $\lambda = \frac{1}{4}$. נגדיר

$$Y = \begin{cases} X, & X \geq 4, \\ 1, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצא את פונקציית ההתפלגות של Y , והאם Y הינו משתנה מקרי רציף?
 ב. חשב את התוחלת של Y .

13. במערכת Massmail רשומים $n = 100$ תלמידים. מרגע הישלח הודעת אי-מייל עד לרגע בו מתקבלת ההודעה בשרת הלקוח עובר זמן הנקרא "זמן קבלת ההודעה". זמן זה אנו מודדים בדקות. נסמן במ"מ X_i את זמן קבלת ההודעה אצל התלמיד ה- i , $1 \leq i \leq n$. ב- Y את זמן קבלת ההודעה עבור כל התלמידים, וב- Z את הזמן הראשון בו התקבלה הודעה ע"י אחד מהתלמידים. נניח שכל האחד מה- X_i הוא מ"מ ב"ת ומפולג מעריכית עם פרמטר λ . נניח ש- $E(Z) = 1$. מצא את:

- א. פונקציית ההתפלגות של Z .
 ב. פונקציית ההתפלגות של Y .