1. ראובן ושמעון משחקים את המשחק הבא. כל אחד מהם בתורו מטיל קוביה, באשר ראובן מטיל ראשון. המשחק ממשיך עד אשר, לראשונה, ראובן מקבל אחת מבין שתי התוצאות $1,6$ או ששמעון מקבל אחת מבין ארבע התוצאות $2,3,4,5$. נניח כי המשחק הסתיים לאחר n הטלות. אם n אי־זוגי, ראובן מקבל משמעון 2^n שקלים, ואילו אם n זוגי שמעון מקבל מראובן 2^n שקלים. יהי X מספר ההטלות במשחק, R סכום הזכיה של ראובן, ו־ N_i מספר ההטלות במשחק בהן הופיעה התוצאה $1 \le i \le 6$. (לדוגמא, אם ראובן קיבל 5, שמעון קיבל 1, ראובן קיבל 3, שמעון קיבל 6, ראובן קיבל 2 ושמעון קיבל 5, המשתנים המקריים יקבלו את הערכים הבאים: $X = 6, R = -64, N_1 = N_2 = N_3 = N_6 = 1, N_4 = 0, N_5 = 2$.)

(א)

i. $P(R > 0) = \frac{3}{7} \cdot P(R < 0)$.

ii. $P(R > 0) = \frac{1}{2} \cdot P(R < 0)$.

iii. $P(R > 0) = \frac{3}{4} \cdot P(R < 0)$.

iv. $P(R > 0) = P(R < 0)$.

v. אף תשובה אינה נכונה.

(ב) $P(N_5 = 20 | X = 100) =$

i. $\frac{\binom{50}{20} \cdot 3^{30}}{4^{50}}$.

ii. $\frac{\binom{50}{20} \cdot 3^{31}}{4^{50}}$.

iii. $\frac{\binom{51}{20} \cdot 3^{30}}{4^{51}}$.

iv. $\frac{\binom{51}{20} \cdot 3^{31}}{4^{51}}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ג) $E(X) =$

i. $\frac{13}{7}$.

ii. $\frac{15}{7}$.

iii. $\frac{17}{7}$.

iv. $\frac{19}{7}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ד)

i. $E(R)=-20$ ו- $V(R)=54$.

ii. $E(R)=-10$ ו- $V(R)$ אינסופי.

iii. הטור המגדיר את $E(R)$ מתכנס בתנאי, ולכן ל- R לא קיימת תוחלת ושונות.

iv. הטור המגדיר את $E(R)$ מתבדר ל- $-\infty$, ולכן ל- R לא קיימת תוחלת ושונות.

v. אף תשובה אינה נכונה.

2. אורך החיים X (בשנים) של נורה מסוג "אור־שמש+" מתפלג $\mathrm{Exp}\left(1\right)$. סטודנט A קנה נורת אור־שמש+ אחת. סטודנטים B ו־C קנו n נורות אור־שמש+ כל אחד. B ו־ C התקינו את הנורות באופן הבא: B התקין את כל הנורות שברשותו במקביל, ואילו C משתמש בנורות אחת אחר השניה. הוא מתקין בתחילה נורה אחת ומחליף כל נורה מייד כאשר היא נשרפת.

(א) ההסתברות כי הנורה של A עדיין תפעל כאשר כל הנורות של B תשרפנה היא:

i. $\frac{1}{2}$.

ii. $\frac{1}{n+1}$.

iii. $\frac{1}{2n}$.

iv. $\frac{1}{2^n}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ב) ההסתברות כי הנורה של A עדיין תפעל כאשר כל הנורות של C תשרפנה היא:

i. $\frac{1}{n+1}$.

ii. $\frac{1}{2n}$.

iii. $\frac{1}{2^n}$.

iv. $\frac{1}{3^n-1}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ג) עוצמתה של נורת אור־שמש+ משתנה במהלך חייה באופן שכמות האנרגיה הנצרכת ע"י נורה שאורך חייה X היא $Y=e^{\alpha X}$, עבור $\alpha\in\left(0,1/2\right)$ קבוע. אזי $\rho\left(X,Y\right)=$

i. $\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+2\alpha}}$.

ii. $1-\alpha$.

iii. $\sqrt{1-\alpha}$.

iv. $\frac{\sqrt{1-2\alpha}}{1-\alpha}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

3. נניח כי (X,Y) מ"מ דו־ממדי רציף בעל צפיפות משותפת הנתונה ע"י:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx^2e^{-\left(x^2+y^2\right)}, & x,y\geq 0,\quad 1\leq x^2+y^2\leq 4,\\ \\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

עבור c מתאים.

(א) $c=$

i. $\frac{e^4}{\pi\left(2e^3-5\right)}$.

ii. $\frac{2e^4}{\pi\left(2e^3-5\right)}$.

iii. $\frac{4e^4}{\pi\left(2e^3-5\right)}$.

iv. $\frac{8e^4}{\pi\left(2e^3-5\right)}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ב) $P\left(X>Y\right)=$

i. $\frac{1}{2}$.

ii. $\frac{e-1}{\pi}$.

iii. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

iv. $\frac{1}{2}+\frac{e}{2\pi}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ג) $E\left({}^{1}\!/_{X}\right)=$

i. $c\cdot\left(\frac{1}{2e}-\frac{1}{e^4}+\frac{\sqrt{\pi}\Phi(2\sqrt{2})}{2}-\frac{\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{2})}{2}\right)$.

(כאן, Φ מסמן את פונקצית ההתפלגות של משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.)

ii. $c \cdot \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} + \frac{\sqrt{\pi}\Phi(2\sqrt{2})}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{2})}{2}\right)$.

iii. $c \cdot \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{e^4} + \frac{\sqrt{\pi}\Phi(2)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\Phi(1)}{2}\right)$.

iv. $c \cdot \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4} + \frac{\sqrt{\pi}\Phi(2)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\Phi(1)}{2}\right)$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ד) נניח כי $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$. פונקצית הצפיפות f_D נתונה ע"י:

i.
$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{c\pi d^3 e^{-d^2}}{8}, & 1 \le d \le 2, \\ \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ii.
$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{c\pi d^3 e^{-d^2}}{6}, & 1 \le d \le 2, \\ \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

iii.
$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{c\pi d^3 e^{-d^2}}{4}, & 1 \le d \le 2, \\ \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

iv.
$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{c\pi d^3 e^{-d^2}}{3}, & 1 \le d \le 2, \\ \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

4. נניח כי $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מ"מ ב"ת רציפים המתפלגים $U(-1,1)$.

(א) יהי N_1 מספר האינדקסים n, בין 1 ל- 10^6, עבורם מתקיים $U_n > 1 - 10^{-6}$.

אזי $P(N_1 = 1) \approx$

i. $\frac{1}{e^2}$.

ii. $\frac{1}{2\sqrt{e}}$.

iii. $\frac{1}{e}$.

iv. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ב) יהי N_2 מספר האינדקסים n, בין 1 ל- 10^6, עבורם מתקיים $|U_n| \leq 0.9$.

אזי $P(|N_2 - 900000| \leq 600) \approx$

i. 0.34.

ii. 0.48.

iii. 0.68.

iv. 0.95.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ג) המשתנה הבא מתפלג מעריכית

i. $-\ln|U_1|$.

ii. $e^{1/|U_1|}$.

iii. $\tan(\pi|U_1|)$.

iv. $\frac{1}{|U_1|} - 1$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.

(ד) נגדיר את שלוש הסדרות $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$X_n = (2+\sin n)\, U_n, \qquad Y_n = \sqrt{n} U_n, \qquad Z_n = nU_n,$$

עבור $n = 1, 2, \ldots$. ניזכר במשפט שהוכח בכיתה, לפיו סדרה של מ"מ ב"ת שווי־התפלגות בעלי תוחלת סופית ושונות סופית מקיימת את החוק החלש של המספרים הגדולים. עבור אלו מהסדרות הבאות ניתן להוכיח, באותה דרך הוכחה שננקטה במשפט, כי הן מקיימות את החוק החלש של המספרים הגדולים. (שימו לב כי אין שואלים אלו מהסדרות מקיימות את תנאי המשפט, וגם לא אלו מהסדרות אכן מקיימות את החוק החלש, אלא רק עבור אלו מהן אפשר להשתמש באותה שיטת הוכחה כדי להראות שהן מקיימות את החוק החלש.)

i. שיטת ההוכחה פועלת עבור שלוש הסדרות $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־ $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$.

ii. שיטת ההוכחה פועלת עבור הסדרות $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־ $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, אך לא עבור $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$.

iii. שיטת ההוכחה פועלת עבור $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, אך לא עבור $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־ $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$.

iv. שיטת ההוכחה אינה פועלת עבור אף אחת מן הסדרות $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־ $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$.

v. אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה.