מבחן מועד ב׳

תאריך הבחינה: 8.8.2016

שמות המרצים: פרופ׳ עמוסביימל
פרופ׳ יפים דיניץ
דר׳ עדן כלמטץ׳
מר אורי שטמר
גב׳ מיכל שמש

שם הקורס: תכנון אלגוריתמים

מספר הקורס: 202-1-2041

שנה: 2016 סמסטר: ב׳ מועד: ב׳

משך הבחינה: **3.5 שעות**

חומר עזר: **אסור**

אנא קיראו היטב את ההראות שלהלן:

- בטופס הבחינה **5** עמודים כולל עמוד זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
- סה"כ נקודות 100.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.** מחברת הטיוטא מיועדת לגריסה!
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- המבחן מורכב מ- 4 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס או לניקוד אין בהכרח קשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- מותר להשתמש באלגוריתמים ידועים (כולל מתרגולים) מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה **מעבודות הבית** דורשת הוכחה מלאה.
- **ניתן להשתמש בטענות של סעיפים קודמים אפילו אם לא פתרתם אותם**.
- טענות ללא נימוק לא תתקבלנה.
- ניתן להסתמך על טענות ומשפטים מהכיתה ומהתרגולים, אך יש לנסח אותם במדויק.
- **אם לא מצוין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא וברור.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתכם לפני הגשתה.
- בשאלות הוכחה/הפרכה אתם נדרשים, בנוסף לתשובה, להקיף בעיגול בדף התשובות את האפשרות שבחרתם (הוכחה או הפרכה). תשובה ללא סימון מתאים לא תתקבל. כמו כן, סימון ללא תשובה לא יתקבל.

בהצלחה!

שאלה 1 [25 נקודות]

סעיף א [7 נקודות]
נתון גרף מכוון $G=(V,E)$. הוכיחו כי אם קשת $(u,v)\in E$ היא חלק ממעגל ב- G, אזי בכל ריצת DFS על G מתקיים ש- u,v נמצאים באותו עץ ביער הפורש המוחזר.

סעיף ב [8 נקודות]
נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ונתונה קשת $(u,v)\in E$ כך שבכל ריצת DFS על G מתקיים ש- u,v נמצאים באותו עץ ביער הפורש המוחזר. הוכיחו כי (u,v) היא חלק ממעגל (לא בהכרח פשוט) ב- G.

סעיף ג [10 נקודות]
תכננו אלגוריתם המקבל כקלט גרף מכוון $G=(V,E)$ ומזהה את כל הצלעות $(u,v)\in E$ המהוות חלק ממעגל ב- G. על האלגוריתם לרוץ בזמן לנארי, כלומר בזמן $O(|E|+|V|)$. יש לנתח את זמן ריצת האלגוריתם, אך אין צורך בהוכחת נכונות.

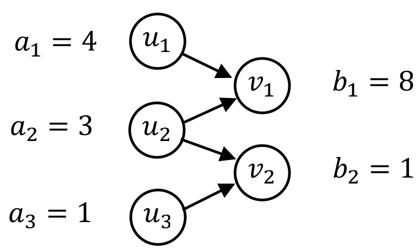
שאלה 2 [25 נקודות]

בשאלה זו נעסוק בבעיית הספקים/צרכנים הבאה:
ישנם n ספקים $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ כאשר ספק u_i יכול לספק עד $a_i\in\mathbb{R}^{\geq 0}$ יחידות של מוצר מסויים.
בנוסף, ישנם m צרכנים $V=\{v_1,\dots,v_m\}$ כאשר צרכן v_i יכול לצרוך עד $b_i\in\mathbb{R}^{\geq 0}$ יחידות של המוצר.
נתון גרף דו צדדי $G=(W,E)$ כאשר $W=U\cup V$ וכאשר $(u_i,v_j)\in E$ אם"ם צרכן v_j רשאי לצרוך את המוצר מספק u_i.

פתרון חוקי: פתרון חוקי הוא קביעה של מספר היחידות שצרכנים צורכים מספקים, תוך שמירה על האילוצים. באופן פורמלי, פתרון חוקי הוא קבוצת זוגות $F\subseteq(E\times\mathbb{R}^{\geq 0})$ כך ש:

1. לכל u_i מתקיים שסך היחידות ש- u_i מספק איננו עולה על a_i. כלומר,
$$\forall u_i\in U:\sum_{((u_i,v),r)\in F} r\leq a_i$$
2. לכל v_j מתקיים שסך היחידות ש- v_j צורך איננו עולה על b_j. כלומר,
$$\forall v_j\in V:\sum_{((u,v_j),r)\in F} r\leq b_j$$

לדוגמה, $F=\{((u_1,v_1),2),((u_2,v_1),1),((u_2,v_2),1)\}$ הוא פתרון חוקי עבור המופע הבא:



למשל, האילוץ עבור u_2 מתקיים: $\sum_{((u_2,v),r)\in F} r=2\leq 3=a_2$

גודל של פתרון חוקי: נאמר שהגודל של פתרון חוקי F הוא סך כמות המוצר המסופק. כלומר, $\text{size}(F) = \sum_{((u,v),r)\in F} r$.

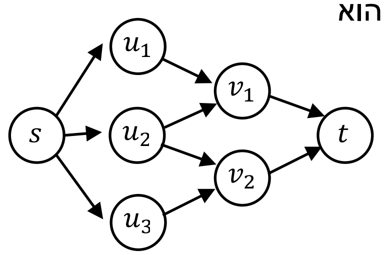
יש למצוא: פתרון חוקי עם גודל מקסימלי.

סעיף א [7 נקודות]

הראו רדוקציה (ממיר קלט+ממיר פלט) מבעיית הספקים/צרכנים הנ"ל לבעיית זרימת מקסימום. אין צורך בהוכחת נכונות.

דרישות:

1. ממיר הפלט מחזיר פתרון לבעיית הספקים/צרכנים (ולא רק גודל של פתרון).
2. ממיר הקלט וממיר הפלט רצים בזמן לנארי. יש לנתח זמני ריצה.
3. בהינתן מופע לבעיית הספקים/צרכנים, על ממיר הקלט להחזיר רשת זרימה $N = (G' = (V', E'), c, s, t)$ כך שגודל זרימת מקסימום ב- N שווה לגודלו של פתרון אופטימלי עבור המופע לבעיית הספקים/צרכנים.
4. קבוצת הקודקודים ברשת הזרימה שתבנו צריכה להיות הקבוצה $V' = \{s,t\} \cup U \cup V$, כאשר U, V הן קבוצות הספקים והצרכנים במופע לבעיית הספקים/צרכנים. בנוסף, קבוצת הצלעות E' צריכה להיות $E' = E \cup \{(s, u_i) : 1 \le i \le n\} \cup \{(v_i, t) : 1 \le i \le m\}$. למשל, הגרף המתקבל עבור הדוגמה הנ"ל הוא



5. בממיר הקלט עליכם להגדיר את כל רכיבי רשת הזרימה.

סעיף ב [5 נקודות]

<u>הגדרה:</u> בהינתן רשת זרימה $N = (G' = (V', E'), c, s, t)$ ושתי קבוצות קודקודים זרות $A, B \subseteq V'$ נסמן ב- $C(A, B)$ את סך קיבולי הצלעות שעוברות מהקבוצה A לקבוצה B. כלומר $C(A,B) = \sum_{\substack{u\in A \\ v\in B}} c(u,v)$, כאשר $c(u,v) = 0$ אם $(u,v) \notin E'$. שימו לב ש- A, B לא בהכרח מהווים חתך בגרף.

יהי (S, T) חתך כלשהו ברשת הזרימה המתקבלת מהפעלת הרדוקציה שלכם מהסעיף הקודם על מופע לבעיית הספקים/צרכנים. הוכיחו כי מתקיים

$$C(S,T) = C(\{s\}, T \cap U) + C(S \cap V, \{t\}) + C(S \cap U, T \cap V)$$

כאשר U, V הן קבוצות הספקים והצרכנים במופע לבעיית הספקים/צרכנים.

סעיף ג [13 נקודות]

<u>הגדרה:</u> נאמר שפתרון חוקי F לבעיית הספקים/צרכנים הוא <u>מושלם</u> אם $\text{size}(F) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, כלומר אם גודל הפתרון שווה לסך כמות החומר שהספקים יכולים לספק.

סימונים:

- עבור קבוצת צרכנים $V' \subseteq V$ נסמן ב- $b(V') = \sum_{v_i \in V'} b_i$ את סך היחידות ש- V' יכולים לצרוך.
- עבור קבוצת ספקים $U' \subseteq U$ נסמן ב- $a(U') = \sum_{u_i \in U'} a_i$ את סך היחידות ש- U' יכולים לספק.
- עבור קבוצת ספקים $U' \subseteq U$ נסמן ב- $V(U')$ את קבוצת כל הצרכנים שיש להם שכן ב- U'. כלומר,

$$V(U') = \{v \in V \ : \ \exists u \in U' \text{ such that } (u,v) \in E\}$$

הוכיחו כי אם לכל $U' \subseteq U$ מתקיים $b\big(V(U')\big) \geq a(U')$ אזי קיים פתרון מושלם.

ניתן להסתמך על נכונות הפתרון לסעיף א.

רמז 1: הזכרו בהוכחה של משפט Hall.
רמז 2: הזכרו במשפט זרימת מקסימום וחתך מינימום.

שאלה 3 [20 נקודות]

הזכרו בהגרדה של צביעה ססגונית (מעבודת בית 6):

הגדרה: תהי X קבוצה כלשהי. צביעה של X ב- t צבעים היא פונקצייה $f: X \to \{1,2,\dots,t\}$.

הגדרה: תהי X קבוצה סופית כלשהי, ותהי $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ תת קבוצה של קבוצת החזקה של X. כלומר $\mathcal{F}$ היא קבוצה המכילה תתי קבוצות של X. נאמר כי X ניתנת לצביעה t-ססגונית ביחס ל- $\mathcal{F}$ אם קיימת צביעה של X ב- t צבעים כך שבכל $F \in \mathcal{F}$ קיים איבר הצבוע ב- j לכל $j \in \{1,\dots,t\}$ (כלומר בכל קבוצה מופיעים כל הצבעים). נאמר שצביעה כנ"ל היא צביעה t-ססגונית ביחס ל- $\mathcal{F}$.

לדוגמה: עבור $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ מתקיים:

- X ניתנת לצביעה 3-ססגונית ביחס ל- $\mathcal{F} = \big\{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{5,6,7\}\big\}$, למשל:

$$f(1) = f(5) = 1, \quad f(2) = f(4) = f(6) = 2, \quad f(3) = f(7) = f(8) = f(9) = 3$$

- X לא ניתנת לצביעה 2-ססגונית ביחס ל- $\mathcal{F} = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\big\}$.

לכל t נגדיר את השפה הבאה:

$$t\text{–ColorfulSubets} = \left\{ (X,\mathcal{F}) : \begin{array}{c} X \text{ קבוצה סופית, } \mathcal{F} \subseteq P(X), \\ X \text{ ניתנת לצביעה t–ססגונית ביחס ל } \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

סעיף א [5 נקודות]

הוכיחו כי $3\text{–ColorfulSubets} \in \text{NP}$

סעיף ב [15 נקודות]

הוכיחו כי 3–ColorfulSubets היא NP-קשה.
ניתן להסתמך על העובדה כי 2–ColorfulSubets היא NP-קשה.

<u>שאלה 4 [30 נקודות]</u> (אין קשר בין סעיפים שונים בשאלה זו)

סעיף א [8 נקודות]
נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל w על צלעות הגרף (לא בהכרח אי שלילית), ונתון קודקוד $s \in V$. ידוע כי קיים עץ מסלולים קלים ביותר מ- s ב- G כך שכל המסלולים בעץ הם באורך (במספר קשתות) $\sqrt{|V|}$ לכל היותר (עץ המסלולים לא נתון לנו, אנו רק יודעים שהוא קיים). תכננו אלגוריתם הרץ בזמן $O\left(|E| \cdot \sqrt{|V|}\right)$ המחשב את $\delta(s, v)$ לכל קודקוד $v \in V$. יש לנתח את זמן ריצת האלגוריתם, אך אין צורך בהוכחת נכונות.

סעיף ב [7 נקודות]
הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
אם $L_1, L_2 \in NPC$ אזי $(L_1 \cup L_2) \in NPC$.
בסעיף זה ניתן להניח כי $P \neq NP$.

סעיף ג [8 נקודות]
בסעיף זה נעסוק בבעיית התקשורת הבאה בין אליס לבוב:
הקלט של אליס הוא פונקצייה $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, כך שמתקיים אחד משני התנאים הבאים:
1. f היא פונקצייה קבועה, כלומר קיים $\sigma \in \{0,1\}$ כך שלכל $x \in \{0,1\}^n$ מתקיים $f(x) = \sigma$.

או

2. f היא פונקצייה מאוזנת, כלומר $|\{x : f(x) = 1\}| = |\{x : f(x) = 0\}| = 2^n/2$.

לבוב אין קלט, והמטרה שלו היא להחליט איזה משני התנאים מתקיים.

<u>חוקי המשחק:</u> לבוב מותר לשלוח לאליס הודעה אחת $m_{Bob} = x_1, x_2, \dots, x_t$ המכילה t מחרוזות בנות n ביטים כ"א. עבור כל מחרוזת x_i שאליס מקבלת מבוב היא שולחת לו את $f(x_i)$. כלומר אליס מחזירה לבוב את ההודעה $m_{Alice} = f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_t)$. לאחר מכן בוב מכריז "קבועה" או "מאוזנת". אליס ובוב לא שולחים הודעות אחרות זה לזו.

תכננו פרוטוקול אקראי עם סיבוכיות תקשורת נמוכה ככל שתוכלו (כלומר הפרמטר t קטן ככל שתוכלו), אשר בסיומו בוב מכריז "קבועה" או "מאוזנת" כך שמתקיים:
- אם f קבועה אז הפרוטוקול לא טועה.
- אם f מאוזנת אז הפרוטוקול טועה בהסתברות $1/16$ לכל היותר.

הוכיחו את נכונות הפרוטוקול.

סעיף ד [7 נקודות]
הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, ותהי $(u, v) \in E$ כך שלקודקוד v אין שכנים נוספים (פרט ל- u). קיים כיסוי בצמתים של G בגודל מינימלי המכיל את u.