שאלה 1 סעיף א'

הערך שאנחנו מחפשים הינו $OPT(n)$

$$OPT(j) = \begin{cases} j = 1, & 0 \\ j > 1, & min_{1 \le k \le j-1}\{OPT(k) + Prices[k][j]\} \end{cases}$$

שאלה 1 סעיף ב'

$OPT(j)$ הינה עלות מינמלית לנתיב הפלגה חוקי מתחנה 1 אל תחנה j. אם j=1 אין צורך להפליג ולכן $OPT(1) = 0$. אחרת, כל מסלול מתחנה 1 ל-j יעבור בתחנה האחרונה באחת מתחנות $1 \le k \le j-1$ ועלות המעבר האחרון תהיה בדיוק $Prices[k][j]$ בתוספת עלות מינימלית לנתיב הפלגה חוקי מתחנה 1 אל תחנה k שהיא בדיוק $OPT(k)$.

שאלה 1 סעיף ג'

1. $M[1] \leftarrow 0$
2. $for\ j = 2\ to\ n\ do$
   a. $M[j] \leftarrow \infty$
   b. $for\ k = 1\ to\ j-1\ do$
      i. $M[j] \leftarrow \min\{M[j], M[k] + Prices[k][j]\}$
3. Return $M[n]$

זמן ריצה - $O(n^2)$ (שתי לולאות)

הוכחת נכונות- בעת השמת ערכים למערך M אנחנו ממלאים אותו מ-1 עד n ובסיום כל השמה ערך זה לא ישתנה לאורך כל ריצת האלגוריתם. בנוסף בהשמה ל-M[j] אנחנו משתמשים רק בערכים M[k] עבור k<j (שחושבו כבר).

נוכיח באינדוקציה שלמה על j כי $OPT(j) = M[j]$, בסיס: $M[1] = 0 = OPT(1)$.

נניח כי עבור ערכים קטנים מ$-$ l הטענה מתקיימת ונוכיח עבור $M[l]$.

לפי שורה 2bi באלגוריתם:

$M[l] \leftarrow min_{1 \le k \le l-1}\{M[k] + Prices[k][l]\}$

לפי הנחת האינדוקציה לכל $k < l$ מתקיים $M[k] = OPT(k)$ ולכן:

$M[l] \leftarrow min_{1 \le k \le l-1}\{OPT(k) + Prices[k][l]\} = OPT(l)$

כנדרש.

שאלה 1 סעיף ד'

1. $Sol = \langle n \rangle, current \leftarrow n$
2. $for\ i = n-1\ to\ 1\ do$
   a. $if\ M[current] = M[i] + Prices[i][current]$
      i. $Sol \leftarrow \langle i \rangle \circ Sol$
      ii. $current \leftarrow i$
3. $Return\ Sol$

ניתוח זמן ריצה: שלב 1 אורך מספר קבוע של פעולות. בשלב 2 הלולאה חלה O(n) פעמים, בכל שלב מתבצע מספר קבוע של פעולות. בסה"כ O(n).

שאלה 2 סעיף א'

$\Leftarrow$ נניח כי (S,T) חתך מינימום. אזי ממשפט Max-Flow-Min-Cut מתקיים כי $c(S,T)=|f|$. בנוסף, מתקיים $|f|=f(S',T')$ לכל חתך (S',T') ברשת, ולכן סה"כ נקבל כי $c(S,T)=f(S,T)$. כלומר, $\sum_{u\in S,v\in T}c(u,v)=\sum_{u\in S,v\in T}f(u,v)$. מאילוצי קיבול, לכל $u,v\in V$ מתקיים $f(u,v)\le c(u,v)$, ולכן נקבל $f(u,v)=c(u,v)$ לכל $u\in S,v\in T$.

$\Rightarrow$ יהא חתך (S,T) ונניח כי מתקיים $f(u,v)=c(u,v)$ לכל $u\in S,v\in T$. אזי מכאן נקבל כי $c(S,T)=\sum_{u\in S,v\in T}c(u,v)=\sum_{u\in S,v\in T}f(u,v)=f(S,T)$. לכל חתך (S',T') מתקיים $|f|=f(S',T')$, ומכך נובע כי $c(S,T)=|f|$, ולכן ממשפט Max-Flow-Min-Cut נקבל כי (S,T) חתך מינימום.

שאלה 2 סעיף ב'

נניח בשלילה כי קיים זוג קדקודים $u,v\in C$ כך ש - $u\in S,v\in T$, עבור חתך מינימום (S,T). יש מסלול מ $-u$ ל $-v$ ב - G_f אשר הינו חלק מהמעגל C, כלומר מסלול המתחיל ב $-S$ ומסתיים ב $-T$, ולכן קיימת קשת (x,y) השייכת למעגל וחוצה את החתך (מ- S ל- T). (S,T) הוא חתך מינימום ולכן מסעיף א' מתקיים כי $f(x,y)=c(x,y)$ ומכאן נקבל כי $c_f(x,y)=c(x,y)-f(x,y)=0$. כלומר, הקשת (x,y) לא תופיע ברשת השיורית N_f בסתירה לכך שהיא חלק מהמעגל C ב - G_f.

שאלה 2 סעיף ג'

יהא חתך מינימום (S,T) ותהא קשת $(x,y)\in E$ החוצה את החתך כך ש - $x\in S,y\in T$. מסעיף א' מתקיים כי $f(x,y)=c(x,y)$, כלומר הקשת (x,y) רוויה ולכן לא נמצאת ב - G_f. נתון כי $c(x,y)>0$ ולכן הקשת ההפוכה מקיימת $f(y,x)=-c(x,y)<0\le c(y,x)$. בפרט הקשת (y,x) לא רוויה ומכאן נקבל שבגרף G_f תופיע הקשת ההפוכה (y,x). לכן מתקיים לפי ההגדרה $K(y)\le K(x)$. בנוסף, מכיוון ש- $x\in S,y\in T$, לפי סעיף ב', מתקיים כי x,y הם לא חלק ממעגל מכוון משותף, ומכאן שהם לא באותו רכיב קשיר היטב. כלומר מתקיים $K(x)\ne K(y)$ ולכן סה"כ נקבל $K(y)<K(x)$.

שאלה 3 סעיף א'

יש להראות שהשפה שייכת למחלקה NP ושהינה $NP-Hard$.

<u>$L=3-Clique-or-3-IS\in NP$:</u>

העד יהיה 3 קבוצות קדקודים. האלגוריתם יוודא ש-3 הקבוצות מהוות חלוקה של קדקודי הגרף G. במידה וכן, האלגוריתם יבדוק האם כל אחת מ-3 הקבוצות הינה קליקה. אם כן – יענה $True$. אחרת – יבדוק האם כל אחת מ-3 הקבוצות הינה קבוצה בלתי-תלויה. במידה וכן – יענה $True$. בכל מקרה אחר – יענה $False$.

פולינומיות העד והאלגוריתם האימות: העד הינו 3 תתי קבוצות זרות של קדקודים ולכן לינארי בגודל הקלט. כמו-כן, עלות הבדיקה עבור כל תת-קבוצה (קליקה או קבוצה בלתי תלויה) הינה $O(|V|^2)$ ולכן האלגוריתם רץ בזמן פולינומי בגודל הקלט והעד.

נכונות האלגוריתם: עבור $G \in L$ קיימת חלוקה ל-3 תתי קבוצות העונות על אחד מתנאי השפה ולכן עבור עד השווה לחלוקה זו יוחזר $True$. עבור גרף G שאינו בשפה, כל חלוקת קודקודים ל-3 קבוצות אינה עומדת בדרישות השפה ולכן לכל עד יוחזר $False$.

<u>$L \in NP - Hard$:</u>

נראה $3 - coloring \leq_p L$, ומאחר ו-$3 - coloring \in NP - Hard$, נסיק את המתבקש מתכונת הטרנזיטיביות של רדוקציות פולינומיות.

פונקצית הרדוקציה: עבור קלט $G = (V, E)$, תחזיר הרדוקציה את הגרף $G' = (V', E)$ כאשר $V' = V \cup \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$. במילים פשוטות הרדוקציה תוסיף שלושה קדקודים מבודדים לגרף הקלט.

פולינומיות הרדוקציה: הרדוקציה מבצעת מספר קבוע של צעדי חישוב ולכן, כמובן, פולינומית.

נכונות הרדוקציה: $G \in 3 - coloring \iff f(G) = G' \in L$.

$\Rightarrow$ $G \in 3 - coloring$, כלומר קיימת פונקצית צביעה $c: V \to \{1,2,3\}$ כך שעבור כל $(u, v) \in G$, מתקיים $c(u) \neq c(v)$. נגדיר את 3 הקבוצות הבאות: $1 \leq i \leq 3$, $V_i = \{ u \in V , c(u) = i\}$.

נראה כי כל אחת מן הקבוצות שהוגדרה זה עתה הינה קבוצת קדקודים בלתי-תלויים ב-G'. מאחר ולא התווספו צלעות לגרף G', אם שני קדקודים היו בלתי-תלויים ב-G, כך יהיה גם ב-G'. יהיו u, v שני קדקודים שרירותיים ב-V_i. מאופן בניית V_i, נסיק כי $(u, v) \notin E$. לכן V_i קבוצה בלתי-תלויה. לאחר הוספת הקדקודים v_1^*, v_2^*, v_3^* לקבוצות אלו (באופן שרירותי) נקבל חלוקה של V' העונה לדרישת אי-התלות של השפה ולכן $f(G) \in L$.

$\Leftarrow$ נניח ש-$f(G) = G' \in L$.

טענת עזר (תוכח בהמשך): V' לא ניתנת לחלוקה ל-3 קבוצות כך שכל אחת מהן תהווה קליקה.

מטענת העזר, נסיק כי V' ניתנת לחלוקה ל-3 קבוצות בלתי-תלויות V_1, V_2, V_3. נסמן ב-V_1^*, V_2^*, V_3^* את החלוקה שצוינה, לאחר מחיקת הקדקודים v_1^*, v_2^*, v_3^*. קבוצות אלו זרות בזוגות, ואיחודן הינו הקבוצה V (קדקודי הגרף G). נבנה את פונקצית הצביעה הבאה: $\forall u \in V_i^*, c(u) = i$ עבור $1 \leq i \leq 3$. נראה כי c צביעה חוקית של G: מבניית הצביעה, אם $c(u) = c(v)$, אזי $u, v \in V_i^*$ ומהגדרת הקבוצות $(u, v) \notin E$.

כל שנותר לעשות הוא להוכיח את טענת העזר:

נניח בשלילה ש-V' ניתנת לחלוקה ל-3 קליקות. נבחין כי מאחר ו-v_1^*, v_2^*, v_3^* אינם מקושרים זה לזה, כל אחד מהם מוכרח להיות בקבוצה שונה. כמו-כן, קיימת לפחות קבוצה אחת בה מופיעים קדקודים מהקבוצה V. נסמנה (בה"כ) ב-V_1 ונניח שנמצא בה הקדקוד v_1^*. קדקודי קבוצה זו אינם מקושרים ל-v_1^* ולכן היא אינה קליקה. בסתירה להנחה.

שאלה 3 סעיף ב'

נוכיח בהמשך כי $3 - Biclique \in P$. מהנתון $3 - Biclique \in NPH$ ולכן ניתן לבצע רדוקציה פולינומית מכל שפה $L \in NP$ לשפה זו. כלומר, לכל $L \in NP$ מתקיים $L \leq_p Biclique$. על סמך למה שהוכחה בהרצאות (אם שפה $B \in P$ וגם $A \leq_p B$ אז $A \in P$) לכל $L \in NP$ נובע ש- $L \in P$. מכאן $NP \subseteq P$. הוכחנו כי $P \subseteq NP$ ומכאן $P = NP$.

<u>אלגוריתם פולינומי עבור $3-Biclique$:</u>
עבור גרף לא מכוון $G=(V,E)$,
בנה את הגרף "המשלים" $\bar{G}$ כך ש-$\bar{G}=(V,\bar{E}), \bar{E}=\{(u,v) \mid (u,v)\notin E\}$.
מצא את רכיבי הקשירות של $\bar{G}$ (למשל ע"י הפעלת DFS). אם ישנם לפחות 3 רכיבי קשירות, החזר "כן", אחרת – החזר "לא".

<u>נכונות האלגוריתם:</u>
נוכיח כי $G\in 3-Biclique$ אמ"מ ב-$\bar{G}$ ישנם לפחות 3 רכיבי קשירות.
$\Leftarrow$ קיימת חלוקה של V ל-3 קבוצות זרות V_1,V_2,V_3 כך שבין כל שני קדקודים מקבוצות שונות קיימת צלע. לכן, בין כל שני קדקודים מקבוצות שונות לא תהיה צלע ב-$\bar{G}$. כלומר, לא יתכן ש-$u,v\in V$ המקיימים $u\in V_i, v\in V_j, j\neq i$ ישתייכו לאותו רכיב קשירות ב-$\bar{G}$. נסיק כי ישנם לפחות 3 רכיבי קשירות בגרף זה.

$\Rightarrow$ נסמן את רכיבי הקשירות של $\bar{G}$ ב-$C_1,\dots,C_k$. נקבץ אותם באופן שרירותי ל-3 קבוצות D_1,D_2,D_3. מהגדרת D_i, עבור כל קדקוד $u\in D_i$, לא קיימת צלע לקדקודים מ- D_j עבור $j\neq i$. לכן, בגרף G קיימת צלע מ- u לכל אחד מהקדקודים ב- D_j עבור $j\neq i$. מכאן ש- D_1,D_2,D_3 הינה החלוקה המבוקשת ולכן $G\in 3-Biclique$.

<u>ניתוח זמן ריצה:</u>
הגרף $\bar{G}$ מכיל $|V|$ קדקודים, ולכל היותר $|V|^2$ צלעות.
הפעלת BFS הינה לינארית בגודל הקלט, כלומר $O(|V|+|\bar{E}|)=O(|V|+|V|^2)$.
סה"כ האלגוריתם מבצע $O(|V|^2)$ צעדי חישוב, וזה כמובן פולינומי בגודל הגרף המקורי.

שאלה 4 סעיף א'

פונקצית הרדוקציה של קוק לוין בונה ארבעה פסוקים: $\varphi_{init},\varphi_{move},\varphi_{cell},\varphi_{accept}$. נתבונן בהצבה אשר בוחרת עד w ומתארת טבלת חישוב המתאימה לריצה של מכונת טיורינג על הקלט (x,w). ללא תלות בשייכות x לשפה, כל שלושת הפסוקים הראשונים יסופקו ע"י הצבה זו: האיתחול תקין, המעברים חוקיים, ובכל תא בטבלה יש ערך יחיד (נבחין שאם הקלט אינו תקין, טבלת החישוב של המכונה תקינה - היא פשוט תסתיים במצב דוחה). לעומת זאת, הפסוק הרביעי φ_{accept} יסתפק ע"י הצבה זו אם"ם החישוב יסתיים במצב מקבל. נזכור שφ_{accept} - הינו פסוקית יחידה ולכן יסופקו לפחות $m-1$ פסוקיות.
(הערה- אם x בשפה הצבה זו תספק את כל m הפסוקיות.)

שאלה 4 סעיף ב'

נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה. אזי קיים עפ"מ $T=(V,F)$ עבורו בה"כ $e_1\notin F$. לפי משפט 2, הוספת e_1 ל- T סוגרת בו מעגל. נבחר את הצלע הכבדה ביותר במעגל, נסמנה e'. נבחין כי $e'\neq e_1$ וכן $e'\neq e_2$ שכן במעגל יש לפחות 3 צלעות, ונתון ש e_1 ו e_2 קלות ממש מכל הצלעות בגרף. נסיר את e', ולפי משפט 2 נובע שהגרף $H=(V,\{F\backslash\{e'\}\}U\{e1\})$ הינו עץ פורש.
משקלו של H: $w(H)\ =\ w(T)-w(e')+w(e_1)$
ומכיוון ש $w(e_1)<w(e')$, נקבל ש $w(H)<w(T)$ בסתירה לכך ש T הוא עץ פורש מינימום.

שאלה 4 סעיף ג'

הטענה שגויה. זרימה חוסמת ברשת השכבות אינה בהכרח זרימת מקסימום.

נתבונן בדוגמא הבאה, בה כל הקיבולים הם 1:

אם נזרים 1 לאורך המסלול המודגש נקבל זרימה חוסמת שאינה מקסימאלית והאלגוריתם יבצע איטראציה נוספת.