תכנון אלגוריתמים – מועד א' 2016
דגשים וטעויות נפוצות

שאלה 1 – טעויות נפוצות:

שאלה 1 א:

- הגדרת min על מספר איברים בודדים ולא על כל האפשרויות לצעד אחרון במסלול.
- הגדרת טווח שגויה בפונ' המינימום, למשל:

  כאשר $i = 0$ אין תא במערך Prices בעמודה 0.
  כאשר $i = j$ הנוסחא לא מוגדרת היטב, משום שהביטוי $OPT(j)$ מופיע כחלק מנוסחאת המבנה עבור $OPT(j)$.
- השמטת הערך אותו אנו מחפשים, $OPT(n)$.

שאלה 1 ב:

- ניתן הסבר על האלגוריתם ולא הסבר על הנוסחה.
- הסבר שטען שבמקרה הכללי של נוסחת הנסיגה "חישבנו את כל האופציות" והחסיר שלמעשה חישבנו את כל האופציות לצעד אחרון. (זוהי מהות ההסבר שנדרש).

שאלה 1 ג:

- השמטת ניתוח זמן ריצה או השמטת הוכחה.
- נדרשה הוכחה (למשל באינדוקציה) לכך ש-$\forall 1 \leq j \leq n: M[j] = OPT(j)$, טיעונים ללא הוכחה לא התקבלו.
- השמטה כי הערכים שאנו ניגשים אליהם בכל איטרציה חושבו כבר בשלבים מוקדמים יותר.

שאלה 1 ד:

- אלגוריתם לא יעיל שרץ בזמן של $O(n^2)$- לרוב קרה בגלל:
- לולאה פנימית שרצה מלמטה למעלה במקום ההיפך.
- השמטה של עדכון אינדקס הלולאה החיצונית לאחר שמצאנו את הערך הבא במסלול.
- ניתוח לא הדוק של זמן הריצה (מימשו אלגוריתם נכון אך ציינו חסם לא הדוק $O(n^2)$ במקום $(O(n)$
- אלגוריתם שעובר על כל אברי מערך ובודק לכל איבר $1 \leq j \leq n$שמתקיים עבור i כלשהו: $M[j] = M[i] + Prices(i)(j)$.

אלגוריתם כזה ייכשל למשל אם ישנם יותר ממסלול אחד קצר.

שאלה 2

- בכל הסעיפים נתון חתך מינימום (S,T) שרירותי. לצורך הוכחת משפט שהוכחנו בהרצאות (משפט 3 בדפי העזר) בנינו חתך (S^*,T^*) ספציפי בו S הוגדרה להיות קבוצת כל הצמתים הנגישים מ- s בגרף השיורי G_f ו- T^* כל שאר הצמתים, והראינו שחתך זה אכן מקיים $c(S,T) = |f|$ עבור זרימת מקסימום f.
  אך חתך זה מהווה בנייה ותו לו! זאת אינה ההגדרה של חתך מינימום, אלא בנייה מסויימת של אחד מתוך מספר רב של חתכי מינימום שייתכנו ברשת זרימה. תשובות לכל אחד מהסעיפים אשר התייחסו רק לחתך (S^*,T^*) הנ״ל מפורשות, או לתכונות שלו, ולא לחתך מינימום (S,T) שרירותי לא זוכו בניקוד.
- ניתן לשפר (להגדיל) זרימה רק באמצעות מסלול שיפור ברשת השיורית. כלומר, באמצעות מסלול מ- s ל- t אשר כל הצלעות בו אינן רוויות. קיום צלע אחת בחתך שאינה רוויה לא מצביע ישירות על קיום מסלול שיפור, או על אפשרות להגדיל את גודל הזרימה.

שאלה 2 א:

- סטודנטים הניחו בשלילה כי יש קשת המקיימת $f(u,v) \neq c(u,v)$. ומכאן שהיא מופיעה ברשת השיורית. עד כאן, הכל נכון. כעת, הם כתבו כי אם יש קשת חוצת חתך ברשת השיורית אזי ניתן להזרים עליה עוד ולהגדיל את הזרימה בסתירה לכך שהזרימה מקסימלית.
- סטודנטים כתבו כי בחתך מינימום מתקיים כי לכל $u \in S$ יש מסלול מ $-$ s ל- u,
  וכן יש מסלול מכל $v \in T$ ל- t ברשת השיורית.
  ומכאן שאם הקשת (u,v) תופיע ברשת השיורית אז יהיה מסלול שיפור בסתירה לכך ש $-f$ היא זרימת מקסימום.

סטודנטים הסיקו מכך ש - $f(S,T) = c(S,T)$ כי לכל קשת (u,v) חוצת חתך מתקיים $f(u,v) = c(u,v)$ מבלי להתבסס על אילוצי קיבול.

שאלה 2 ב:

סעיף זה מתייחס לזוג קודקודים שרירותי $u,v \in C$. לא ניתן ש- (u,v) מהווה קשת במעגל, או ב- G_f באופן כללי. כדי להיעזר בסעיף א׳ (בהוכחה בשלילה), יש להראות קיום קשת ב- G_f שחוצה את החתך. לא ניתן להתייחס ישירות ל- (u,v) כקשת כזו. לחילופין, ניתן להשתמש בסעיף א׳ כדי להראות שאין בכלל קשתות מ- S ל- T ב- G_f ולהסתמך על עובדה זו כדי להראות שמעגל מכוון לא יכול לעבור בין שני הצדדים.

שאלה 2 ג:

- האלגוריתם של קוסראג׳ו-שריר מחלק גרף מכוון לרכיבים קשירים היטב וגם מחזיר את רכיבי הקשירות ממויינים לפי סדר מיון טופולוגי <u>כלשהו</u>. הרכיבים הקשרים היטב אמנם מוגדרים באופן יחיד עבור כל גרף מכוון ,אך זה לא המצב עבור מיון טופולוגי. לכן, לא ניתן להתייחס לסדר כזה כסדר שבהכרח הוחזר ע״י ריצת אלגוריתם כזה או אחר, משום שהוא אינו יחיד.
- מספר תשובות השתמשו בטיעון השגוי הבא: ״אם $K(y) > K(x)$ [אחרים כתבו 'אם $K(y) \geq K(x)$'], אזי קיימת קשת [אחרים כתבו ׳מסלול׳] מ- x ל- y״. בעוד כיוון הגרירה השני נכון (אם קיימת קשת או קיים מסלול כזה ,אזי אכן מתקיים $K(y) \geq K(x)$, גרירה בכיוון המצוטט אינה נכונה. לא ניתן להסיק מסדר המיון על קיום קשת או מסלול.

שאלה 3 א:

החלוקה למקומות (קופסאות) נפרדים עבור כל חלק בסעיף זה נועדה להזכיר לסטודנטים מה צריך להוכיח ולשמור על הסדר. לא ניתן לכתוב לא יודע עבור חלק מסעיף.

<u>תאור אלגוריתם אימות:</u>

- חסר זמן ריצה ו/או הוכחת נכונות.
- שימו לב כי הוכחת נכונות חייבת להסביר מיהו העד עבורו אלגוריתם האימות יחזיר TRUE עבור קלט שבשפה.
- שימו לב כי בניתוח זמן ריצה בדיקה כי קבוצה היא קליקה או בת"ל אורכת $O(|V|^2)$ ואינה ליניארית בקלט.

<u>תאור הרדוקציה $3-Coloring \leq_p 3-Clique-or-3-IS$:</u>

הרדוקציה צריכה לפעול על הקלט ללא כל ידיעה על השתייכות הקלט לשפה $3-Coloring$ או על צביעה כלשהי.

- בהנתן גרף, קלט לשפה $3-Coloring$ לא ניתן להתבסס על צביעה ב-3 צבעים ולתאר על פיה את הרדוקציה. תשובות שהסתמכו על צביעה בדרך כלשהי לא התקבלו.
- רדוקציות שהסתמכו על השתייכות או אי השתייכות הקלט לשפה $3-Coloring$ לא התקבלו.

ניתנו רדוקציות רבות אשר עבורן הגרירה בכיוון הראשון
$(x \in 3-Coloring \Rightarrow f(x) \in 3-Clique-or-3-IS)$ התקיימה באופן טריוויאלי.
שימו לב כי בדרך כלל הכיוון השני הוא הפחות טריוויאלי ויש לשים לב אליו.
רדוקציות הזהות או רדוקציות אשר בנו את הגרף ההופכי קיבלו ניקוד נמוך יותר.
רדוקציות אשר הוסיפו חלקים מנותקים לגרף קיבלו ניקוד גבוה יותר.
טעות נפוצה מאוד היתה להוסיף קודקוד בודד לגרף ולטעון בהוכחה בכיוון השני כי הוספתו מנעה את השתייכות $f(x)$ לשפה כיוון שכל קבוצה אליה ישתייך לא תהווה קליקה. שימו לב כי קודקוד בודד זה יכול להיות בקבוצה לבדו ולהוות קליקה. לכן היה צריך להוסיף לפחות שלושה קודקודים.
היו גרסאות רבות ומגוונות בתאור הרדוקציות, כאן התייחסתי לגרסא הנפוצה ביותר.

שאלה 4 א:

שימו לב לניסוח הפורמלי- לא ניתן להניח ש x בשפה.

שאלה 4 ב:

- הוכחות שהסתמכו על ריצה של אלגוריתם לא התקבלו. בפרט, קרוסקל – בהנתן גרף, קרוסקל ימצא עץ יחיד מבין כל העצים הקיימים.

באופן כללי, בהנתן עפ"מ איננו יכולים לסמך על טכניקת החיפוש או הפתרון שלנו, אלא על הנתונים בלבד.

- יש לשים לב שכאשר מסירים צלע, יתכן והיא תהיה הצלע השניה הקלה ביותר.

שאלה 4 ג:

רבים מהסטודנטים אשר ענו "לא נכון" סיפקו דוגמא נגדית שגויה והסבר שגוי (לרוב כזה המתאר כי בכל איטרציה של האלגוריתם של דיניץ יימצא מסלול יחיד (במקום זרימה חוסמת) ברשת השכבות). תשובות בסגנון זה קיבלו ניקוד נמוך.