תאריך הבחינה: 20.7.2016
שמות המרצים: פרופ׳ עמוסביימל
פרופ׳ יפים דיניץ
דר׳ עדן כלמטץ׳
מר אורי שטמר
גב׳ מיכל שמש

שם הקורס: תכנון אלגוריתמים
מספר הקורס: 202-1-2041
שנה: 2016 סמסטר: ב׳ מועד: א׳
משך הבחינה: **3.5 שעות**
חומר עזר: **אסור**

מבחן מועד א׳

אנא קיראו היטב את ההוראות שלהלן:

- בטופס הבחינה **6** עמודים כולל עמוד זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
- סה"כ נקודות 100.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.** מחברת הטיוטא מיועדת לגריסה!
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- המבחן מורכב מ- 4 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס או לניקוד אין בהכרח קשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- מותר להשתמש באלגוריתמים ידועים (כולל מתרגולים) מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה **מעבודות הבית** דורשת הוכחה מלאה.
- **ניתן להשתמש בטענות של סעיפים קודמים אפילו אם לא פתרתם אותם.**
- טענות ללא נימוק לא תתקבלנה.
- ניתן להסתמך על טענות ומשפטים מהכיתה ומהתרגולים, אך יש לנסח אותם במדויק.
- **אם לא מצוין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא וברור.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתכם לפני הגשתה.

בהצלחה!

שאלה 1 [20 נקודות]

בשאלה זו נתכנן הפלגה לאורך חופי הים התיכון. לאורך החוף n תחנות הממוספרות $1, \dots, n$, מדרום לצפון. אנו נמצאים בתחנה 1 (הדרומית ביותר) ומעוניינים להגיע לתחנה n (הצפונית ביותר). ניתן להפליג ישירות מכל תחנה i אל תחנה j בתנאי ש- $1 \leq i < j \leq n$. שימו לב שניתן להפליג רק לכיוון צפון.
ההפלגה בין כל שתי תחנות חייבת בתשלום, ומחירי ההפלגה מתחנה i אל תחנה j נתונים במטריצה $prices[i][j]$. עלות ההפלגה הכוללת היא סך מחירי ההפלגות מתחנת המוצא 1 אל תחנת היעד n.

באופן פורמלי:

<u>בעיית ההפלגה הזולה ביותר</u>

<u>מופע</u>: מטריצה $prices$ בגודל $n * n$, בה נתונים מספרים חיוביים בתאים $prices[i][j]$ עבור $1 \leq i < j \leq n$ ואפסים על האלכסון.

נגדיר <u>נתיב הפלגה חוקי</u> להיות סדרת תחנות $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ כך שמתקיים:

- לכל $1 \leq i \leq k$, $a_i \in \{1, \dots, n\}$.
- $a_1 = 1 , a_k = n$
- לכל $1 \leq i < j \leq k$ מתקיים $a_i < a_j$.

<u>עלות נתיב הפלגה</u> חוקי $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ הינה סכום מחירי ההפלגה מתחנה לתחנה עוקבת בנתיב $\sum_{i=1}^{k-1}(prices[a_i][a_{i+1}])$

<u>פתרון אופטימלי</u>: נתיב הפלגה חוקי בעל עלות זולה ביותר.

<u>דוגמא</u>: עבור 4 תחנות הממוספרות מ- 1 עד 4, נתונה המטריצה prices הבאה:

i \ j	1	2	3	4
1	0	1	1	5
2		0	2	3
3			0	1
4				0

מתקיים למשל $\text{prices}[2][3] = 2$.

נתיב הפלגה חוקי: $\langle 1,2,4 \rangle$ ומחירו הוא $\text{prices}[1][2] + \text{prices}[2][4] = 1 + 3 = 4$.

נתיב חוקי זול ביותר: $\langle 1,3,4 \rangle$ ומחירו הוא $prices[1][3] + prices[3][4] = 1 + 1 = 2$.

בארבעת הסעיפים הבאים נתכנן פתרון המבוסס תכנון דינאמי לבעיית ההפלגה הזולה ביותר.
לכל $j = 1, \dots, n$ נגדיר את $OPT(j)$ להיות עלות זולה ביותר של נתיב הפלגה חוקי מתחנה 1 אל תחנה j.

סעיף א [5 נקודות]

הגדירו את נוסחת המבנה לחישוב $OPT(j)$ כולל מקרי בסיס וציינו מהו הערך אותו אנו מחפשים.

סעיף ב [3 נקודות]

הסבירו בקצרה את נכונות הנוסחה לחישוב $OPT(j)$ מסעיף א'.

סעיף ג [7 נקודות]

תארו אלגוריתם לחישוב **עלות** פתרון אופטימאלי לבעיה המבוסס על הנוסחה לחישוב $OPT(j)$ מסעיף א'. לצורך כך יש להגדיר ולאתחל מבנה נתונים M בגודל $1 * n$ בו בסיום ריצת האלגוריתם יתקיים $M[j] = OPT(j)$ לכל $j = 1, \dots, n$.

סעיף ד [5 נקודות]

תארו אלגוריתם לחישוב **פתרון** אופטימאלי לבעיה המשתמש במבנה הנתונים שחישב האלגוריתם מסעיף ג'. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח זמן ריצה.

שאלה 2 [35 נקודות]

בכל סעיפי שאלה זו תהי $N = (G = (V, E), c, s, t)$ רשת זרימה ותהי ***f* זרימת מקסימום** ב- N.

סעיף א [9 נקודות]

הוכיחו את הטענה הבאה:
חתך (S, T) המקיים $s \in S, t \in T$ הוא חתך מינימום ב- N אם"ם לכל $u \in S, v \in T$ מתקיים $f(u, v) = c(u, v)$.

סעיף ב [14 נקודות]

יהי C מעגל מכוון ב- G_f ויהי (S, T) חתך מינימום. הוכיחו כי כל זוג קודקודים במעגל $u, v \in C$ נמצאים שניהם יחד באותו צד של החתך (שניהם נמצאים ב- S או שניהם נמצאים ב- T).

בהמשך לנתון לעיל, נסמן ב- $C_1, C_2, \dots, C_k$ את הרכיבים קשירים היטב של G_f ברשת השיורית N_f, נתונים על פי סדר מיון טופולוגי בגרף הרכיבים קשירים היטב של G_f. במילים אחרות, אם קיימת קשת (u, v) ב- G_f כך ש- $u \in C_i$ ו- $v \in C_j$ אז $i \leq j$.

לכל קודקוד $v \in V$ נסמן ב- $K(v)$ את האינדקס של הרכיב הקשיר היטב המכיל את v, כלומר, $v \in C_{K(v)}$.

סעיף ג [12 נקודות]

תהי קשת $(x, y) \in E$ כך ש- $c(x, y) > 0$. הוכיחו כי אם (x, y) חוצה חתך מינימום כלשהו (S, T) כך ש- $x \in S, y \in T$ אז $K(y) < K(x)$.

<u>שאלה 3 [25 נקודות]</u>

אין קשר בין סעיפים שונים בשאלה.

בשאלה זו ניתן להשתמש בעובדה שהשפה $3-Coloring$ (מוגדרת בדפי העזר) היא NP- קשה.

סעיף א [15 נקודות]

בבעיית $3-CLIQUE-or-3-IS$ נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ויש לקבוע האם לפחות אחד משני התנאים הבאים מתקיימים:

- ניתן לחלק את צמתי הגרף לשלוש קבוצות זרות V_1,V_2,V_3 כך שכל אחת משלוש הקבוצות V_1,V_2,V_3 מהווה קליקה.
- ניתן לחלק את צמתי הגרף לשלוש קבוצות זרות V_1,V_2,V_3 כך שכל אחת משלוש הקבוצות V_1,V_2,V_3 מהווה קבוצה בלתי תלויה.

הוכיחו כי בעיית $3-CLIQUE-or-3-IS$ הינה $NP-$ שלמה.

סעיף ב [10 נקודות]

בבעיית $3-BICLIQUE$, נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ויש לקבוע האם ניתן לחלק את צמתי הגרף לשלוש קבוצות זרות <u>לא ריקות</u> V_1,V_2,V_3 כך שבין כל שני צמתים שונים $u,v\in V$ שאינם שייכים לאותה קבוצה בחלוקה (כלומר $u\in V_i, v\in V_j$ עבור $i\neq j$) ישנה קשת $(u,v)\in E$.

הראו בקצרה כי אם בעיית $3-BICLIQUE$ היא NP-קשה, אז $P=NP$.

רמז: העזרו ברכיבי הקשירות של גרף לא מכוון.

<u>שאלה 4 [20 נקודות] – שאלת הוכיחו/הפריכו. אין קשר בין סעיפים שונים בשאלה.</u>

במקרה של הוכחה ספקו הוכחה מלאה. במקרה של הפרכה הראו דוגמא נגדית.

סעיף א [7 נקודות]

יהי x קלט לשפה $L \in NP$ ו- $f(x) = \varphi$ הפסוק שנבנה ע"י הרדוקציה של $Cook - Levin$, קלט לשפה SAT. נניח כי ב- φ קיימות m פסוקיות.
אז קיימת הצבה ל- φ המספקת לפחות $m - 1$ פסוקיות ב- φ.

סעיף ב [6 נקודות]

יהי $G = (V, E)$ גרף ממושקל ולא מכוון ו- $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$ שתי קשתות קלות ממש מכל קשת אחרת ב- $E \backslash \{e_1, e_2\}$. אז e_1 וגם e_2 שייכות לכל עץ פורש מינימום של G.

סעיף ג [7 נקודות]

תהי $N = (G = (V, E), c, s, t)$ רשת זרימה. תהי f זרימת האפס ב- N (לכל זוג קודקודים $u, v \in V$ מתקיים כי $f(u, v) = 0$ ולכן מתקיים כי $N = N_f$). נניח כי G בנוי כך ש $L_f = G$ (G זהה לרשת השכבות של N_f המתוארת באלגוריתם של דיניץ).
אז כל ריצה של אלגוריתם דיניץ תסתיים לאחר איטראציה אחת (או שלב אחד).
שימו לב:
<u>איטרציה אחת (או שלב אחד) באלגוריתם של דיניץ כוללים את שורות 4-7 באלגוריתם $Dinitz(G, c, s, t)$ כפי שמופיע בדפי העזר</u>.

בהצלחה!