תאריך הבחינה: 15.7.2015
שמות המרצים: פרופ' עמוסביימל
פרופ' יפים דיניץ
מר רן טייג
דר' עדן כלמטץ'
מר אורי שטמר
גב' מיכל שמש

שם הקורס: תכנון אלגוריתמים
מספר הקורס: 202-1-2041
שנה: 2015 סמסטר: ב' מועד: א'
משך הבחינה: **3.5 שעות**
חומר עזר: **אסור**

# מבחן מועד א'

**אנא קיראו היטב את ההוראות שלהלן:**

- בטופס הבחינה **4** עמודים כולל עמוד זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
- המבחן הינו ללא חומר עזר.
- משך המבחן 3½ שעות.
- סה"כ נקודות 100.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.** מחברת הטיוטא מיועדת לגריסה!
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- המבחן מורכב מ- 4 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס או לניקוד אין בהכרח קשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- מותר להשתמש באלגוריתמים ידועים (כולל מתרגולים) מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה **מעבודות הבית** דורשת הוכחה מלאה.
- **ניתן להשתמש בטענות של סעיפים קודמים אפילו אם לא פתרתם אותם**.
- טענות ללא נימוק לא תתקבלנה.
- ניתן להסתמך על טענות ומשפטים מהכיתה ומהתרגולים, אך יש לנסח אותם במדויק.
- **אם לא מצוין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא וברור.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתכם לפני הגשתה.

# בהצלחה!

## **שאלה 1 [27 נקודות]**

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון, $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית משקל על הקשתות, ו-$s \in V$ קודקוד מקור. נניח כי לא קיימים מעגלים שליליים בגרף $G$.

**הגדרה:** נאמר שקשת $(u, v) \in E$ היא קשת <u>טובה</u> אם קיים מסלול קל ביותר מ-$s$ ל-$v$ שהקשת $(u, v)$ היא אחרונה בו.

**סעיף א [7 נקודות]**
יהי $P$ מסלול מ-$s$ ל-$t$ בגרף. הוכיחו כי P מסלול קל ביותר <u>אם"ם</u> כל קשתות במסלול $P$ טובות.

**סעיף ב [4 נקודות]**
תארו אלגוריתם אשר מוצא את כל הקשתות הטובות בגרף. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח את זמן ריצת האלגוריתם.

בסעיפים הבאים נתונה $\delta(s, v)$ לכל $v \in V$.
<u>רמז לסעיפים ג'+ד'</u>: השתמשו בסעיפים קודמים.

**סעיף ג [8 נקודות]**
תארו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|E| + |V|)$ אשר בהנתן קשת $e \in E$ וקודקוד יעד $t \in V$ מכריע האם $e$ נמצאת על <u>כל</u> מסלול קל ביותר מ-$s$ ל-$t$. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח זמן ריצה.

**סעיף ד [8 נקודות]**
תארו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|E| + |V|)$ אשר בהנתן קשת $e \in E$ וקודקוד יעד $t \in V$ מכריע האם $e$ נמצאת על מסלול קל ביותר <u>כלשהו</u> מ-$s$ ל-$t$. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח זמן ריצה.

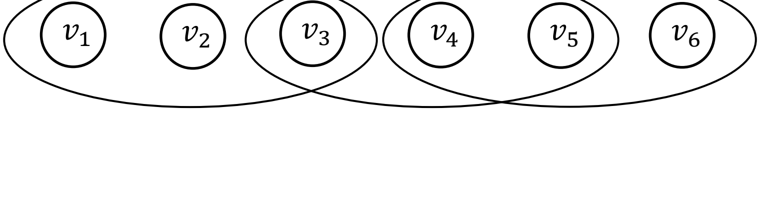
## **שאלה 2 [25 נקודות]**

**הגדרה:** היפר-גרף הוא זוג $H = (V, E)$, כך ש- $V$ היא קבוצת קודקודים וכך ש- $E$ היא קבוצת היפר-קשתות, כאשר כל היפר-קשת היא <u>קבוצה של שלושה קודקודים</u>.

דוגמה:

$$H_1 = (V, E)$$
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4, v_5\}, \{v_4, v_5, v_6\}\}$$

בציור:



**הגדרה:** <u>כיסוי בקודקודים של היפר-גרף</u> $H = (V, E)$ הוא קבוצת קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל היפר-קשת $\{v_1, v_2, v_3\} \in E$ מתקיים $|\{v_1, v_2, v_3\} \cap C| \geq 2$.
(כלומר קב' קודקודים $C$ היא כיסוי בקודקודים אם היא מכילה לפחות 2 קודקודים מכל היפר-קשת).

הראו שהשפה הבאה היא $NP$-שלמה.

$$\text{HVC} = \left\{ \langle H, k \rangle : \begin{array}{c} \text{הוא היפר גרף שיש לו } H \\ k \text{ כיסוי בקודקודים בגודל לכל היותר} \end{array} \right\}.$$

בדוגמה לעיל כיסוי בקודקודים יהיה $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. זהו כיסוי בגודל 4 (הוא אינו יחיד) ולכן $\langle H_1, 4 \rangle \in \text{HVC}$.

רמז: השתמשו בעובדה כי VC הינה $NP$-שלמה.

## שאלה 3 [20 נקודות]

**<u>הגדרה:</u>** תהי $N = (G = (V, E), c, s, t)$ רשת זרימה ו- $f$ זרימה ברשת $N$. <u>*מסלול-זרימה-$f$*</u> ברשת זרימה $N$ הינו מסלול ב-$G$ מ-$s$ ל-$t$ בו לכל קשת $(u, v)$ מתקיים $f(u, v) > 0$.

תהי $N$ רשת זרימה ותהי $f$ זרימה חוקית כך ש- $|f| > 0$. הוכיחו כי קיים מסלול-זרימה-$f$ ברשת זרימה $N$.

הדרכה: מומלץ להשתמש באחד משני הרמזים הבאים (כל אחד מהם מתאים לפתרון אחר)

- חישבו על הזרימה העוברת בחתך $(S, T)$.
- ניתן להשתמש בטענה הבאה ללא הוכחה: תהי $f$ זרימה חוקית. יהי $P$ מעגל פשוט ב- $G$. אם קיים קבוע $a > 0$ כך שלכל $(u, v) \in P$ מתקיים $f(u, v) \geq a$, אזי גם הפונקציה $f'$ הבאה היא זרימה חוקית:

$$f'(u, v) = \begin{cases} f(u, v) - a & , \quad \text{if } (u, v) \in P \\ f(u, v) + a & , \quad \text{if } (v, u) \in P \\ f(u, v) & , \quad \text{else} \end{cases}.$$

## שאלה 4 [28 נקודות] – שאלת הוכיחו/הפריכו. אין קשר בין סעיפים שונים בשאלה.

**סעיף א [6 נקודות]**

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר לא מכוון, ותהי $w: E \to \mathbb{R}$ פונקצית משקל כך שאין ב- $G$ מעגלים שליליים.
יהי $s$ קודקוד ב-$G$.

הגדרה: *גרף מסלולים זולים ביותר מ-$s$ של $G$* הינו עץ לא מכוון $PG$ בו לכל קודקוד $v \in V$ בגרף, המסלול היחיד מ-$s$ ל-$v$ ב-$PG$ הינו מסלול קל ביותר מ-$s$ ל-$v$ ב-$G$.

הוכיחו או הפריכו: $T$ הוא עפ"מ של $G$ אם"ם $T$ הוא גרף מסלולים זולים ביותר מ-$s$ של $G$.

**סעיף ב [6 נקודות]**

הגדרה: $3 - Clique = \{ G :$ G גרף לא מכוון וקיימת בו קליקה בגודל $3\}$.

הוכיחו או הפריכו: השפה $3 - Clique$ שייכת ל-$P$.
במידה ובחרתם לתאר אלגוריתם, אין צורך בהוכחת נכונות.

**סעיף ג [8 נקודות]**

הוכיחו או הפריכו: יהי $G$ גרף מכוון חסר מעגלים שליליים. קיימת ריצה של אלג' Bellman-Ford על $G$ המסתיימת תוך איטרציה אחת.

**סעיף ד**

יהיו $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ אלגוריתמים אקראיים המחזירים "כן" או "לא".

- נתון כי ל- $\mathcal{A}_1$ יש טעות חד-כיוונית לכל היותר $9/10$. כלומר אם התשובה הנכונה על קלט $x$ היא "כן" אז $\mathcal{A}_1(x)$ מחזיר "כן" תמיד, ואם התשובה הנכונה היא "לא" אזי $\mathcal{A}_1(x)$ מחזיר "כן" בהסתברות לכל היותר $9/10$.
- נתון כי ל- $\mathcal{A}_2$ יש טעות דו-כיוונית לכל היותר $1/10$. כלומר לכל קלט $x$ מתקיים ש $\mathcal{A}_2(x)$ מחזיר תשובה שגוייה בהסתברות לכל היותר $1/10$.

עבור פרמטר $t$ ואלגוריתם $\mathcal{A}_i$ נגדיר אלג' $\mathcal{A}_i^t$:

(1) בהנתן קלט $x$, הרץ את $\mathcal{A}_i$ $t$ פעמים על $x$, וקבל תשובות $a_1, a_2, \dots, a_t$.
(2) אם אחת התשובות שהתקבלו היא "לא", אז נחזיר "לא". אחרת נחזיר "כן".

הוכיחו או הפריכו את שתי הטענות הבאות:

**סעיף ד-1 [4 נקודות]**

קיים קבוע $t > 0$ כך שלכל קלט $x$ מתקיים
$\Pr[\text{טועה } \mathcal{A}_1^t(x)] \le 1/100$.

**סעיף ד-2 [4 נקודות]**

קיים קבוע $t > 0$ כך שלכל קלט $x$ מתקיים
$\Pr[\text{טועה } \mathcal{A}_2^t(x)] \le 1/100$.

# בהצלחה!