מציאת מעגל שלילי בגרף

ניסוח הבעיה:

מופע: גרף מכוון וממושקל $G=(V,E)$, וקודקוד $s \in V$.

צריך למצוא: מעגל עם משקל שלילי ב-G, אשר ניתן להגיע אליו מ-s (אם קיים).

רעיון האלגוריתם:

הרעיון הוא להריץ את האלגוריתם של Bellman-Ford, לבצע n איטרציות (במקום $n-1$) ולבדוק האם קיים קודקוד v שערכו $d[v]$ משתנה באיטרציה ה-n. אם קיים, נטען כי בהכרח קיים מעגל שלילי נגיש מ-s, שניתן להגיע אליו אם נעקוב אחרי מערך המצביעים π החל מ-v.

תיאור האלגוריתם:

```
Find-Negative-Cycle(G, w, s)
    for each vertex v ∈ V
        d[v] ← ∞
        π[v] ← nil
    d[s] ← 0
    for i ← 1 to |V|−1 do
        for each edge (u,v) ∈ E
            Relax(u, v, w)
    for each edge (u,v) ∈ E
        d' ← d[v]
        Relax(u, v, w)
        if d' > d[v]
            return Report-Negative-Cycle(v, π)
    return "No negative cycles found"
```

הוכחת נכונות:

כדי להוכיח את נכונות האלגוריתם, עלינו להוכיח שתי טענות:

טענה א: **קיים** מעגל שלילי הנגיש מ-s ב-G אם ורק אם קיימת צלע $(u,v) \in E$ כך שהתנאי $d' > d[v]$ מתקיים עבורה.

הוכחת טענה א: עובדה זו נובעת ישירות מנכונות Bellman-Ford.

טענה ב: אם קיים קודקוד v עבורו מתקיים התנאי $d' > d[v]$, אזי **ניתן** למצוא מעגל שלילי נגיש מ-s ע"י מעקב אחר מערך המצביעים π החל מ-v.

הוכחת טענה ב: לשם כך נשתמש ב-2 טענות.

טענה 1: מעבר על מערך המצביעים π החל מקודקוד v אשר עבורו התקיים התנאי $d' > d[v]$, מוצא מעגל (הנגיש מ-s).

טענה 2: כל מעגל שנוצר במערך π הוא בעל משקל שלילי.

<u>הוכחת טענה 1</u>:

<u>למה 1</u>: לאחר k איטרציות, $d[v] \leq \delta_k(s,v)$, לכל $v \in V$.

הוכחת הלמה דומה להוכחת הלמה מההרצאה בה מראים כי $d[v] = \delta(s,v)$ לכל $v \in V^i$ בסיום האיטרציה ה-i (תזכורת: V^i היא קבוצת הקודקודים להם קיים מסלול קל ביותר מאורך $\geq i$).

<u>למה 2</u>: יהי P_π מסלול במערך π מ- s ל- v. אזי משקל המסלול מקיים: $\omega(P_\pi) \leq d[v] - d[s]$.

נשים לב כי מעבר על המצביעים החל מ-v הוא חד משמעי (אין התפצלויות) כיוון שלכל קודקוד ישנו רק קדקוד אב יחיד.

יהי v קודקוד המקיים את התנאי $d' > d[v]$. (באיטרציה ה- $|V|$, בשורה 11 של האלגוריתם)

כלומר קיימת צלע $(u,v) \in E$ שפעולת $Relax$ באיטרציה ה-$|V|$ עדכנה את $d[v]$ כך:

$$d[v] \leftarrow d[u] + \omega(u,v)$$
$$\pi[v] \leftarrow u$$

נניח בשלילה שהמעבר על מערך המצביעים π החל מקודקוד v אינו מוצא מעגל. כלומר, המעבר מייצר מסלול P מ- v ל- s. בהכרח $|P| \leq n-1$, אחרת היינו מגלים מעגל.

מיהם קודקודי המסלול P? $\langle s, \dots, \pi[\pi[v]], \pi[v], v\rangle = \langle s, \dots, \pi[u], u, v\rangle$

מהו משקל המסלול? בעזרת למה 2 נקבל:

$$\omega(P) = \omega(\langle s, \dots, u\rangle) + \omega(u,v) \leq d[u] - d[s] + \omega(u,v) = d[v] - d[s]$$

מכיוון ש-d' הינו הערך עבור v בתום האיטרציה ה-1 – $|V|$ (ומכך ש-1 – $|V| \leq |P|$) ומלמה 1 – נסיק כי $d' \leq \omega(P)$. בסה"כ:

$$d[v] < d' \leq \omega(P) \leq d[v] - d[s]$$

ולכן $d[s] < 0$. מאחר ו-$d[s]$ מאותחל ל-0, נסיק כי קיים קדקוד s' ממנו בוצע $Relax(s', s, w)$ ולכן $\pi[s] = s' \neq Nil$, כלומר המסלול P אינו מסתיים ב-s, בסתירה.

<u>הוכחת למה 2</u>:

ההוכחה באינדוקציה על אורך המסלול.

בסיס: מסלול באורך 0 מ-s ל-v פירושו מסלול ריק מ-s לעצמו. משקל המסלול 0 ואכן מתקיים $w(P_\pi) = 0 = d[s] - d[s]$.

נניח שכל מסלול באורך $< i$ מקיים את הטענה, ונסתכל על מסלול P באורך i. נסמן ב-P' את הרישא באורך $i-1$ שלו, כלומר מ-s עד ל-$\pi[v]$. משקל המסלול מקיים:

$$\omega(P) = \omega(P') + \omega(\pi[v], v) \leq d\big[\pi[v]\big] - d[s] + \omega(\pi[v], v) \leq d[v] - d[s]$$

כאשר אי השוויון השמאלי הוא בזכות הנחת האינדוקציה, ואי השוויון הימני נכון עבור כל קודקוד ואביו במערך π.

<u>הערה:</u> מהטענה הנשמרת של Bellman-Ford נובע כי (בשורה 8) בתחילת האיטרציה ה- $|V|$, כל קודקוד v הנגיש מ- s מקבל ערך $d[v] < \infty$ והשדה $\pi[v] \neq Nil$. כיוון שהערך $d[v]$ של כל קודקוד v במעגל סופי, נסיק כי המעגל נגיש מ- s.

<u>הוכחת טענה 2</u>:

נתבונן ברגע שבו נוצר מעגל $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$. ב.ה.כ נניח כי המצביע האחרון להתעדכן הוא $\pi[v_1] \leftarrow v_k$. נסמן ב-d' את הערך שהיה ב- $d[v_1]$ לפני העדכון. ניתן להסיק כי

$$\boxed{d' > d[v_1] = d[v_k] + w(v_k, v_1)}. \quad (1)$$

נשים לב שעבור כל קודקוד u וקודקוד האב שלו p , מתקיים $d[u] \geq d[p] + w(p,u)$. השוויון מתקיים ברגע העדכון בו $\pi[u]$ קיבל את הערך p, ולאחר מכן, הערך $d[p]$ יכול רק לקטון כתוצאה מעדכונים נוספים.

נסיק כי $d[v_2] \geq d' + w(v_1, v_2)$, ועבור כל $3 \leq i \leq k$, $d[v_i] \geq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$. לכן:

$$\boxed{d[v_k] \geq d[v_{k-1}] + w(v_{k-1}, v_k) \geq d[v_{k-2}] + w(v_{k-2}, v_{k-1}) + w(v_{k-1}, v_k) \geq \ldots \geq d' + \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})}. \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$d' \underset{(1)\uparrow}{>} d[v_1] = d[v_k] + w(v_k, v_1) \underset{\uparrow(2)}{\geq} d' + \left(\sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) + w(v_k, v_1) \right)$$

ולכן עלות המעגל בהכרח שלילית.

בעיית הרמזורים

חברת אוטובוסים רוצה לתכנן מסלול נסיעה לקו אוטובוס חדש. המסלול יעבור בכבישי העיר מצומת לצומת. חלק מהצמתים מרומזרים וחלק לא. מסקר שערכה חברת אוטובוס, הנוסעים לא יעלו על קו שעובר ביותר משני צמתים מרומזרים. כיוון שמטרת החברה להרוויח כסף, היא מעוניינת לתכנן מסלול קצר ביותר לקו החדש בין שני צמתים נתונים (שניהם לא מרומזרים). עליכם לפתח אלגוריתם שיפתור בעיה זו.

<u>שימו לב</u>: רחובות העיר יכולים להיות חד כיווניים.

<u>ניסוח פורמאלי:</u>

- גרף מכוון $G=(V,E)$ ופונקצית משקל על הצלעות $w:E\to R^+$ (משקלות חיוביים), כאשר הקודקודים V מתארים צמתים ברשת כבישים והצלעות E מתארות את הכבישים (אורך הכביש הוא משקל הצלע).
- תת-קבוצת קודקודים $S\subseteq V$ שמסמלת את קבוצת הצמתים המרומזרים.
- קודקוד התחלה $s\in V\setminus S$ וקודקוד סיום $t\in V\setminus S$ (הצמתים המתאימים אינם מרומזרים).

<u>צריך למצוא</u>: מסלול קצר ביותר מ- s ל- t העובר בלכל היותר שני קודקודים מ- S.

<u>הפתרון</u>: נבצע <u>רדוקציה</u> לבעיית המסלול הקצר ביותר בין שני קודקודים.

<u>תיאור הרדוקציה</u>

<u>שלב תרגום הקלט</u>:

בהינתן מופע של הבעיה $\langle (E,V),w,S,s,t\rangle$, ניצור מופע $\langle (E',V'),w',s_0,t'\rangle$ לבעיית המסלול הזול ביותר מ- s_0 ל- t' בגרף $G'=(V',E')$ עם משקלות w' באופן הבא:

- עבור כל קודקוד בגרף המקורי $x\in V$, ניצור שלושה קדקודים בגרף החדש x_0,x_1,x_2, כאשר המשמעות היא שאם הגענו ל- x_i מ- s, אזי עברנו בדרך ב- i רמזורים. ניתן לדמיין את הגרף החדש כשכפול של הגרף המקורי לשלוש שכבות, כאשר כל שכבה מייצגת את מספר הרמזורים שנתקלנו בהם עד עתה. כמו כן, נוסיף עוד קדקוד t`, אשר יהיה קודקוד היעד במופע שניצור. נגדיר,

$$V'=\{x_i : i=0,1,2;\ x\in V\}\cup\{t'\}$$

- קבוצת הצלעות $E'=E_1\cup E_2\cup E_3$ תורכב מצלעות בתוך כל שכבה E_1 , צלעות בין שכבות E_2 , וצלעות נוספות E_3 , כפי שמוסבר.

1. **צלעות בתוך כל שכבה (E_1)**:

$$E_1=\left\{(x_i,y_i)\,|\,(x,y)\in E,\ y\notin S, i\in\{0,1,2\}\right\}$$

קבוצת הצלעות הראשונה E_1 מורכבת מהצלעות בתוך כל שכבה שמקבילות לכל הצלעות בגרף המקורי $e=(x,y)\in E$, כך ש- y אינו צומת מרומזר ($y\notin S$). משקלן של צלעות האלו יהיה כמשקל הצלע המתאימה בגרף המקורי $w'(x_i,y_i)=w(x,y)$.

2. **צלעות בין שכבות (E_2)**:

$$E_2=\left\{(x_i,y_{i+1}):(x,y)\in E;\ y\in S, i\in\{0,1\}\right\}$$

קבוצת הצלעות השנייה E_2 מורכבת מהצלעות משכבה 0 ל-1 ומהצלעות משכבה 1 ל-2 .

צלעות אלה מקבילות לכל הצלעות בגרף המקורי $e=(x,y)\in E$, כך ש- y הוא צומת מרומזר ($y\in S$). משקלן של צלעות האלו יהיה כמשקל הצלע המתאימה בגרף המקורי $w'(x_i,y_{i+1})=w(x,y)$.

3. **צלעות נוספות (E_3)**:

$$E_3=\left\{(t_0,t'),(t_1,t'),(t_2,t')\right\}$$

קבוצת הצלעות השלישית E_3 מורכבת מצלעות עם משקל 0 שמאפשרות להגיע מ- t_i ל- t ללא עלות, זאת כיוון שאנו מקבלים מצב שבו חצינו לכל היותר 2 רמזורים. משקלן של צלעות האלו הוא $w'(t_i,t')=0$.

<u>שלב הקופסה השחורה</u>:

נריץ את האלגוריתם של Dijkstra על המופע שיצרנו $\langle (E',V'),w',s_0,t'\rangle$ ונמצא מסלול זול ביותר מהמקור s_0 ליעד t' .

<u>שלב תרגום הפלט</u>:

בהינתן פתרון למופע שיצרנו, מסלול $P'=\{s_0=x^0,x^1,...,x^k=t'\}$ ב-G' בעל מחיר L, נמיר אותו לפתרון לבעיה המקורית – מסלול זול ביותר מ-s ל-t ב-G העובר בכלל היותר שני צמתים מרומזרים. המסלול שנקבל יהיה אף הוא בעלות L.

- כיוון שהצלעות היחידות שמובילות ל-t' הן מ-E_3, לכן $x^{k-1}=t_i$, עבור $i\in\{0,1,2\}$ כלשהו. כיוון שמשקל צלעות אלה ב-G' הוא 0, נסיק כי עלות המסלול $\{x^0,x^1,...,x^{k-1}\}$ היא L.
- נשארנו עם מסלול המכיל צלעות E_1 ו-E_2 בלבד. כאשר יש בדיוק i צלעות מ-E_2 (עברנו בכלל היותר i רמזורים ולכן עברנו לכל היותר i פעמים בין שכבות).
- יהי $P=\{s=y^0,y^1,...,y^{k-1}=t\}$ מסלול ב-G כאשר צלע $(y^j,y^{j+1})\in E$ מתאימה ל-$(x^j,x^{j+1})\in E_1$ אם $y^{j+1}\in S$ (צומת מרומזר) או ל-$(x^j,x^{j+1})\in E_2$ אם $y^{j+1}\notin S$ (צומת מרומזר), עבור $j\in\{0,1,\ldots,k-2\}$.
- עלות המסלול P היא גם L לפי הגדרת משקל הצלעות.

<u>הוכחת נכונות</u>

<u>טענה ראשית</u>: המסלול P הוא המסלול הזול ביותר ב-G מ-s ל-t מבין אלה שלא עוברים ביותר משני קודקודים מ-S אם"ם P' הוא המסלול הזול ביותר ב-G' מ-s_0 ל-t'.

<u>טענת עזר</u>: קיים מסלול ב-G מ-s ל-t העובר בכלל היותר 2 רמזורים ובעל משקל L, אם"ם קיים מסלול מ-s_0 ל-t' ב-$G'=(V'E')$ במשקל L.

<u>הוכחת הטענה הראשית</u>:

כיוון ראשון: יהי P מסלול ב-G שמתקבל בסוף שלב תרגום הפלט ממסלול מתאים P' ב-G' ואורכו L. נניח (בשלילה) כי קיים מסלול ב-G (העובר בכלל היותר 2 רמזורים) P^*, שאורכו $L^*<L$. עפ"י טענת העזר נקבל כי קיים מסלול ב-G' בעל אורך L^*, בסתירה לאופטימאליות הקופסא השחורה (האלגוריתם של Dijkstra).

כיוון שני: יהי P מסלול קצר ביותר באורך L מ-s ל-t ב-G שלא עובר ביותר משני קודקודים מ-S. מט.ע. קיים מסלול מתאים P' ב-G' מ-s_0 ל-t' באורך L. נניח בשלילה כי קיים ב-G' מסלול P'^* מ-s_0 ל-t' באורך L^* כך ש-$L^*<L$. מט.ע. נובע כי קיים ב-G מסלול מתאים P^* באורך L^* מ-s ל-t בסתירה למינימאליות P.

<u>הוכחת טענת העזר</u>: ההוכחה היא באמצעות בנייה (בדומה לזאת שנעשתה בכדי להמיר את הפתרון של G' לפתרון לבעיה המקורית). שני הכיוונים הם סימטריים ולכן נוכיח רק את הכיוון שבהינתן מסלול P ב-G העובר בלכל היותר 2 רמזורים ובעל משקל L, נבנה מסלול P' ב-G' בעל משקל L.

יהי $P=\{s=x^0,x^1,...,x^{k-1}=t\}$ מסלול ב-G באורך L. יהי $0\le i\le 2$ מספר הצמתים המרומזרים שהמסלול עובר בהם. עלינו להתייחס לשלוש אפשרויות של הערכים של i ב.ה.כ. נניח $i=2$ ונסמן את הצמתים המרומזרים y^{j_1}, y^{j_2}, עבור $1\le j_1<j_2\le k-1$.

ניצר את המסלול המתאים ב-G': $P=\{s_0=x_0^0,x_0^1,...,x_0^{j_1-1},x_1^{j_1}...,x_1^{j_2-1},x_2^{j_2}\text{K}\ ,x_2^{k-1},x^k=t\}$, כאשר $(x_0^{j_1-1},x_1^{j_1}),(x_1^{j_2-1},x_2^{j_2})\in E_2$, $(x_2^{k-1},x^k=t)\in E_3$ ושאר הצלעות הן ב-E_1.

כיוון שעלות הצלעות ב-E_1 ו-E_2 זהה לעלות של הצלעות המתאימות ב-E ועלות הצלעות ב-E_3 היא 0 ניתן להסיק כי עלותו של P' היא גם L.

<u>זמן ריצה</u>

- יצירת הגרף `G:
  - מס' הקדקודים הוא $3|V|+1$, וניתן ליצור אותם ב-$O(|V|)$.
  - מס' הצלעות הוא לכל היותר $3|E|+3$, וניתן ליצור אותם ב-$O(|E|)$.
  - יצירת פונקצית המשקל `w מלווה את יצירת הצלעות ולוקחת $O(|E|)$.
- הרצת הקופסא השחורה: הרצת האלגוריתם של Dijkstra דורשת $O(|E'|+|V'|\log|V'|)$.

  <u>שימו לב</u>: הזמן הוא במונחי המופע החדש שיצרנו וצריך לעבור למונחי המופע המקורי. מכיוון שבגרף שיצרנו יש $3|V|+1$ קודקודים ולכל היותר $3|E|+3$ צלעות, נקבל $O(|E|+|V|\log|V|)$.
- המרת המסלול שקיבלנו למסלול בגרף המקורי תארך כאורכו של המסלול $O(|V|)$.

ולכן זמן הריצה כולו הוא $O(|E|+|V|\log|V|)$.