

תרגול מס' 5 – אלגוריתם Dijkstra

Dijkstra

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE (G, s)

```

1 for each vertex  $v \in V[G]$  do
2    $d[v] \leftarrow \infty$ 
3    $\pi[v] \leftarrow \text{NIL}$ 
4  $d[s] \leftarrow 0$ 
    
```

אלגוריתם Dijkstra – מוצא מסלולים זולים ביותר מקודקוד מקור לכל הקודקודים בגרף מכוון ומושקל במשקלות אי-שליליים.

זמן הריצה - $O(|E| + |V| \log |V|)$.

RELAX (u, v, w)

```

1 if  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  then
2    $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ 
3    $\pi[v] \leftarrow u$ 
    
```

האלגוריתם משתמש בשדה $d[v]$ לצורך שמירת משקל המסלול הזול ביותר הנוכחי מהמקור לקודקוד v , וב- $\pi[v]$ לצורך שמירת הקודקוד ה"לפני אחרון" במסלול הזול ביותר הנוכחי (לצורך שחזור המסלול).

DIJKSTRA (G, w, s)

```

1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  $S \leftarrow \emptyset$ 
3  $Q \leftarrow V[G]$ 
4 while  $Q \neq \emptyset$  do
5    $u \leftarrow$  vertex  $u \in Q$  with minimal  $d[u]$ 
6    $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
7   for each vertex  $v$  in  $Q$  such that  $v \in \text{Adj}[u]$  do
8     RELAX( $u, v, w$ )
    
```

כמו כן, האלגוריתם משתמש בשתי רוטינות עזר.

ברוטינה INITIALIZE-SINGLE-SOURCE, מאותחלים כל השדות ונקבע המרחק של s מ- s להיות 0.

הרוטינה RELAX, בהינתן קודקודים u ו- v , נערכת

בדיקה האם יותר קצר להגיע ל- v דרך u או לא.

← דוגמת ריצה של האלגוריתם

בעיית צוואר הבקבוק

הגדרה: יהי G גרף מכוון ממושקל, ויהי $P = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ מסלול בגרף. צוואר הבקבוק של מסלול P הוא משקל הקשת המינימאלית ב- P , כלומר $bn(P) = \min \{w(v_i, v_{i+1}) : 0 \leq i \leq k-1\}$.

עבור זוג קודקודים $s, u \in V$ נגדיר את $\beta(s, u)$ כגודל צוואר הבקבוק המקסימלי מבין צווארי הבקבוק של כל המסלולים המובילים מ- s ל- u , או $-\infty$ אם לא קיים מסלול כזה:

$$\beta(s, u) = \begin{cases} \infty & s = u \\ \max \{ \{bn(P) : P \text{ is a path from } s \text{ to } u\} \cup \{-\infty\} \} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ניסוח הבעיה:

מופע: נתון גרף ממושקל $G = (V, E, w)$, וקודקוד מקור s .

צריך למצוא: $\beta(s, u)$ לכל $u \in V$. (צוואר הבקבוק המקסימלי של מסלול מ- s ל- u).

מוטיבציה: דמינו לעצמכם רשת כבישים כשבחלק מהכבישים (קשתות) יש הגבלת גובה בגלל גשרים (משקל הקשת). המטרה היא למצוא מה הגבלת הגובה בין נקודת התחלה (s) לכל נקודה אחרת ברשת הכבישים.

האלגוריתם:

```

BRelax ( $u, v, w$ )
1   if  $b[v] < \min \{b[u], w(u,v)\}$ 
2        $b[v] \leftarrow \min \{b[u], w(u,v)\}$ 
    
```

```

BottleNeck ( $G, w, s$ )
1   for each vertex  $v \in V$ 
2        $b[v] \leftarrow (-\infty)$ 
4    $b[s] \leftarrow \infty$ 
5    $S \leftarrow \emptyset$ 
6    $Q \leftarrow V$ 
7   While  $Q \neq \emptyset$ 
8        $u = \text{vertex } u \in Q \text{ with maximal } d[u]$ 
9        $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
10      For each  $v$  in  $Q$  such that  $(u,v) \in E$ 
11          BRelax ( $u, v, w$ )
    
```

הסבר לאלגוריתם:

האלגוריתם משתמש בשדה $b[v]$ לצורך שמירת צוואר הבקבוק המקסימאלי הנוכחי של מסלול מהמקור לקודקוד v .

בכל שלב, האלגוריתם בוחר קודקוד u עם צוואר בקבוק מקסימאלי, ומעדכן את שכניו שעדיין ב- Q . ברגע שצומת הוצא מ- Q , לא נעדכן אותו יותר (כלומר, ערכו לא ישתנה).

← דוגמת ריצה של האלגוריתם

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה עיקרית: לאחר הרצת $\text{BottleNeck}(G, w, s)$ מתקיים $\beta(s, u) = b[u]$ עבור כל קודקוד $u \in V$.

ניעזר בטענות עזר הבאות:

טענה 1: עבור כל צלע (u, v) בגרף מתקיים $\beta(s, v) \geq \min \{\beta(s, u), w(u, v)\}$.

טענה 2: בכל שלב בריצת האלגוריתם, עבור כל קודקוד v , מתקיים: $b[v] \leq \beta(s, v)$.

אבחנה: לאחר הוספת קודקוד v ל- S הערך $b[v]$ לא משתנה במהלך ריצת האלגוריתם. (בשורה 10 או מעדכנים רק v ב- Q)

הוכחת הטענה העיקרית:

נראה שעבור כל קודקוד $u \in V$, בעת הכנסתו ל- S מתקיים $b[u] = \beta(s, u)$. לפי האבחנה שוויון זה מתקיים עד סוף ריצת האלגוריתם.

ישנם שלושה מקרים:

1. $u = s$

במקרה זה s מוכנס ראשון ל- S , כאשר $b[s] = \beta(s, s) = \infty$ לפי הגדרה.

2. אין מסלול בגרף מ- s ל- u : במקרה זה $\beta(s, u) = (-\infty)$. לפי טענה 2 בכל שלב באלגוריתם מתקיים $b[u] \leq \beta(s, u)$ ולכן עד סוף האלגוריתם מתקיים $b[u] \leq -\infty$ ולכן $b[u] = -\infty$.

3. ישנו מסלול בגרף מ- s ל- u ו- $s \neq u$: נוכיח באינדוקציה על סדר הוצאת הצמתים מ- Q . נניח שמתקיים עבור כל הצמתים שהוכנסו לפני u ונוכיח עבור u . לפי טענה 2:

$$[1] \quad b[u] \leq \beta(s, u)$$

יהי P מסלול מ- s ל- u המקיים $bn(P) = \beta(s, u)$. כאשר מוסיפים את u ל- S , קודקוד המקור s כבר ב- S ולכן קיימת צלע $(x, y) \in P$ ש- $x \in S$ ו- $y \notin S$, ברגע הכנסת u (ראה תרשים). כיוון שבחרנו ב- u ולא ב- y מתקיים

$$[2] \quad b[u] \geq b[y]$$

כמו כן, כיוון ש- x כבר ב- S , ע"פ הנחת האינדוקציה $b[x] = \beta(s, x)$. כבר ביצענו את BRelax על הצלעות היוצאות מ- x , אזי:

$$[3] \quad b[y] \geq \min\{\beta(s, x), w(x, y)\}$$

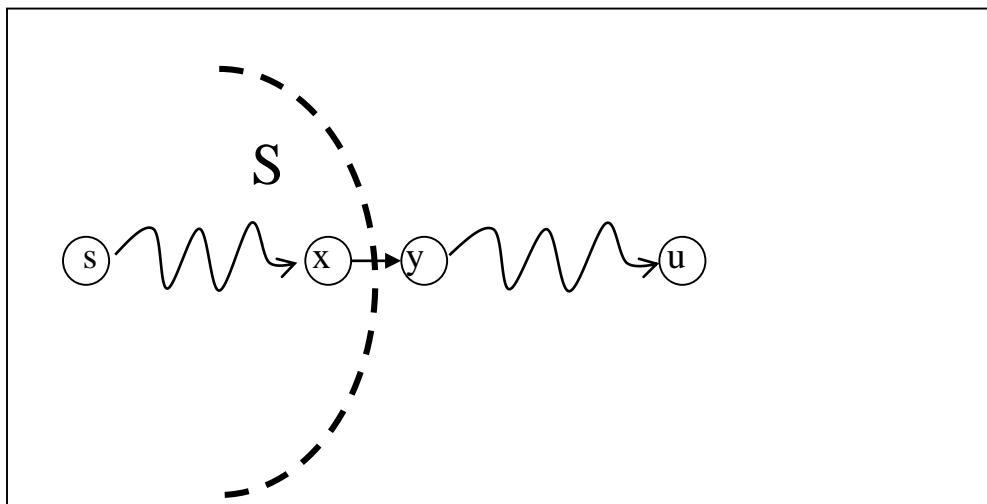
מסלול P עובר דרך הצלע (x, y) ולכן,

$$[4] \quad \beta(s, u) = bn(P) \leq \min\{\beta(s, x), w(x, y)\}$$

אם נשלב את כל האי-שוויונות נקבל:

$$[5] \quad b[u] \underset{[1]}{\leq} \beta(s, u) \underset{[4]}{\leq} \min\{\beta(s, x), w(x, y)\} \underset{[3]}{\leq} b[y]$$

מ- [2] ומ- [5] נקבל $b[u] = b[y]$. לכן, עפ"י [5] $b[u] = \beta(s, u)$ בעת הכנסתו ל- S . לפי האבחנה, ערך זה לא משתנה בהמשך. נכוונת האלגוריתם גובעת מכך שכל הקודקודים מוכנסים בסוף ל- S .



הוכחת טענה 1:

אחד המסלולים האפשריים אל v הוא המסלול בעל צוואר הבקבוק הגדול ביותר אל u , משורשר עם הצלע (u, v) . צוואר הבקבוק של מסלול זה הוא $\min\{\beta(s, u), w(u, v)\}$. לכן $\beta(s, v) \geq \min\{\beta(s, u), w(u, v)\}$.

הוכחת טענה 2:

אם $b[v] = -\infty$, אזי בהכרח $\beta(s, v) \geq b[v]$. אחרת, נראה באינדוקציה על מספר האיטרציות, שלכל קודקוד $v \in V$, כך ש- $b[v] > -\infty$, קיים מסלול s -ל- v בעל צוואר בקבוק $b[v]$.

בסיס: לאחר 0 איטרציות, s הוא הקודקוד היחיד המקיים $b[s] > -\infty$. עבור כל הקודקודים $v \neq s$ מתקיים $b[v] = -\infty$ ו- $b[s] = \infty$. לפי הגדרה $b[s] = \beta(s, s) = \infty$.

נניח כי טענת האינדוקציה נכונה לאחר k איטרציות, ונראה כי היא נכונה גם לאחר $k+1$ איטרציות.

יהי v קודקוד כך שלאחר k איטרציות מתקיים $b[v] > -\infty$. אם $b[v]$ לא השתנה במהלך האיטרציה ה- $k+1$, אזי מהנחת האינדוקציה קיים מסלול s -ל- v בעל צוואר בקבוק $b[v]$. אחרת, $b[v]$ השתנה באיטרציה ה- $k+1$, כלומר קיים קודקוד u כך ש- $b[v]$ שונה במהלך הפעלת $\text{BRelax}(u, v, w)$ באיטרציה זו ע"י השורה: $b[v] \leftarrow \min\{b[u], w(u, v)\}$. כיוון ש- $b[u]$ לא השתנה באיטרציה זו, ניתן להסיק מהנחת האינדוקציה כי קיים מסלול s -ל- u כך שצוואר הבקבוק שלו הוא $b[u]$. שרשרת הצלע (u, v) למסלול זה יוצרת מסלול s -ל- v שצוואר הבקבוק שלו הוא $\min\{b[u], w(u, v)\}$, ולכן $b[v]$ מקבל ערך של צוואר בקבוק של מסלול s -ל- v .

הוכחה אלטרנטיבית לטענה 2:

נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה, ויהי v הקודקוד הראשון המקיים $\beta(s, v) < b[v]$. נסתכל על פעולת ה- BRelax מקודקוד u , אשר אחריה קיבלנו $\beta(s, v) < b[v]$. בפעולה זו נקבל $b[v] = \min\{b[u], w(u, v)\} > \beta(s, v)$. כיוון ש- v הוא הקודקוד הראשון המפר את הטענה, בשלב זה מתקיים $\beta(s, u) \geq b[u]$, ולכן,

$$\min\{\beta(s, u), w(u, v)\} \geq \min\{b[u], w(u, v)\} = b[v] > \beta(s, v)$$

$$\geq \min\{\beta(s, u), w(u, v)\}$$



סתירה.