אלגוריתמים חמדניים

אלגוריתם חמדן, הוא כזה שבכל צעד עושה את הבחירה הטובה ביותר האפשרית, ולא מתחרט בהמשך. גישה זו נראית פשטנית מדי, וכמובן שלא תמיד היא נכונה, אך במקרים רבים היא מוצאת פתרון אופטימאלי. בתרגול זה נעסוק בפתרון בעיית בחירת הפעילויות ע"י גישה חמדנית.

<u>בעיית הפעילויות:</u>
נתונה קבוצה של פעילויות : $A = \{1, \dots, n\}$, ונתונים זמני ההתחלה והסיום שלהן, כאשר s_i ו- f_i מציינים, בהתאמה, את זמן ההתחלה והסיום של הפעילות ה-i-ית.

<u>הגדרה</u>: שתי פעילויות $i, j \in A$ **אינן מתנגשות** אם $s_i \geq f_j$ או $s_j \geq f_i$.
אינטואיטיבית, הכוונה שזמני הפעילויות אינם חופפים למעט, אולי, רגע בודד שבו מסתיימת פעילות אחת -ומתחילה פעילות שנייה.

<u>הגדרה</u>: **קבוצת פעילויות חוקית** היא קבוצה בה כל שתי פעילויות $i, j \in A$ אינן מתנגשות.

<u>צריך למצוא</u>: תת-קבוצה חוקית של פעילויות מתוך A מקסימאלית בגודלה. (תת-קבוצה בעלת מספר מקסימאלי של פעילויות).

<u>אבחנה</u>: ייתכן כי יש יותר מקבוצה אחת כזאת.

נרצה להציג אלגוריתם חמדני שמוצא קבוצה חוקית מגודל מקסימאלי. הבחירה החמדנית תבחר בכל שלב פעילות שאחרי בחירתה, משך הזמן שנשאר בכדי להמשיך ולשבץ בו פעילויות נוספות, הוא הארוך ביותר. זוהי פעילות עם זמן סיום מוקדם ביותר.
נתחיל בהצגת פתרון איטראטיבי, ובהמשך נראה גם פתרון חמדני רקורסיבי.

<u>**אלגוריתם איטראטיבי**</u>

האלגוריתם בונה קבוצת פעילויות G , שהיא קבוצת הפעילויות הנבחרות. בכל שלב נבחרת באופן חמדני פעילות אחת מתוך S, שהיא קבוצת הפעילויות שמהן ניתן לבחור. בתחילה G ריקה ו- S מכילה את כל הפעילויות. עם כל בחירה, הפעילות שנבחרה נוספת ל- G ומ- S נמחקות כל הפעילויות שמתנגשות עם הפעילות שבחרנו, כך שלא תיבחר אחת מהן בהמשך.

$\boldsymbol{Activity\_Iter\ (A)}$

- $G \leftarrow \emptyset$
- $S \leftarrow A$
- $While\ S \neq \emptyset\ do:$
  - $i \leftarrow$ index of an activity in S with the earliest finishing time
  - $S \leftarrow S \backslash Collide(i)$
  - $G \leftarrow G \cup \{i\}$
- Return G

<u>סכמה כללית מומלצת להוכחת נכונות (עבור אלגוריתמים חמדנים)</u> בד"כ אלגוריתם חמדני בונה את הפתרון בשלבים כאשר בכל שלב הפתרון שהאלגוריתם בנה עד כה מוכל בפתרון אופטימאלי כלשהו. בסוף ריצת האלגוריתם ערכו של הפתרון שהתקבל זהה לגודל הפתרון האופטימאלי ולכן הם שווים.

<u>הוכחת נכונות 1</u>: (הועברה בהרצאה)

<u>אינטואיציה:</u>
נוכיח שבכל שלב של ריצת האלגוריתם מתקיים: קיים פתרון אופטימאלי P^* המכיל את הקבוצה G $(G \subseteq P^*)$ שהאלגוריתם בחר עד לאותה נקודה וכל שאר הפעילויות בו לקוחות מתוך קבוצת הפעילויות שנותרו לבחירה, S. $(P^* \setminus G \subseteq S)$
בהתחלה G ריקה ומוכלת בכל פתרון.
בכל פעם שנוסיף ל-G פעילות, יש להראות שעדיין קיים פתרון אופטימאלי P^* המכיל את G. כלומר, יש להראות שכשמוסיפים ל-G את הפעילות ה-k-ית, קיים פתרון אופטימאלי P_k^* המכיל את כל k הפעילויות שנמצאות באותו רגע ב-G .
נסתכל על P_{k-1}^*, הפתרון שהובטח לנו כי הוא מכיל את $k-1$ הפעילויות הראשונות שבחרנו.
אם הוא מכיל גם את הפעילות ה-k שבחרנו, סיימנו.
אם לא, נטען כי נוכל למצוא פתרון (אולי אחר) זהה בגודלו ל-P_{k-1}^*, אשר מכיל את כל k האיברים הראשונים שבחרנו, וזאת ע"י החלפת איבר מסוים של P_{k-1}^* (שאינו בין $k-1$ האיברים הקודמים) באיבר ה-k שנוסף ל- G.

<u>טענה עיקרית</u>: הקבוצה G המוחזרת ע"י האלגוריתם היא קבוצת פעילויות חוקית מגודל מקסימאלי.

<u>טענת עזר</u>: בכל פעם שהאלגוריתם מגיע לבדיקת תנאי הלולאה קיימת קבוצה חוקית מגודל מקסימאלי של פעילויות מ- A אשר מכילה את G ושאר הפעילויות בה לקוחות מ- S בלבד.
(כלומר: בסוף כל איטרציה מתקיים – $P^* \setminus G \subseteq S$)

<u>אבחנה</u>: בכל פעם שמתווספת ל- G פעילות, זוהי פעילות בעלת זמן סיום מינימאלי מבין כל הפעילויות ב-A אשר אינה מתנגשת עם אף אחת מהפעילויות שנבחרו עד כה ב- G (הסבר: הבחירה נעשית מתוך S, ובכל הוספה קודמת של פעילות, הורדנו מ-S את כל הפעילויות שמתנגשות עם אותה פעילות. לכן מובטח לנו שכל בחירה תהיה מתוך קבוצת פעילויות שאינן מתנגשות עם אף פעילות שנבחרה בשלב קודם).

<u>הוכחת נכונות האלגוריתם:</u>

ראשית, נשים לב לכך שהאלגוריתם סופי- בכל איטרציה מוציאים מ- S לפחות פעילות אחת, ולכן בהכרח בשלב כלשהו יתקיים תנאי העצירה $(S = \emptyset)$, והאלגוריתם יסתיים.

לפי טענת העזר, קיימת קבוצת פעילויות חוקית מקסימאלית בגודלה P^* המכילה את G אשר מוחזרת בסיום האלגוריתם, ובפרט G היא קבוצת פעילויות חוקית.
יתרה מזאת, בסיום הלולאה הקבוצה S ריקה ולכן על פי טענת העזר אין ב-P^* פעילויות נוספות. ■

<u>הוכחת טענת העזר</u>: באינדוקציה על גודל הקבוצה G.

<u>סימונים</u>: G_k - הקבוצה G המוחזקת ע"י האלגוריתם לאחר בחירת k פעילויות.
i_k- הפעילות ה-k -ית שהאלגוריתם בחר.
S_k - קב' הפעילויות הנותרות, אחרי הורדת $Collide(i_k)$.

- נוכיח שקיימת קבוצה חוקית מקסימאלית המכילה את G_k, ונסמנה P^*, וכן מתקיים $P^*\setminus G_k \subseteq S_k$.
- נסמן P_k^* קבוצה חוקית מקסימלית המכילה את G_k.
- נשים לב כי בעוד לכל $i \neq j$ מתקיים $G_i \neq G_j$, אך יתכן ש-$P_i^* = P_j^*$.
- הערה: לא להניח את קיומה של הקבוצה P_k^*, צריך להוכיח את זה.

עבור $k = 0$, $G_0 = \emptyset$ וכל קבוצה חוקית מגודל מקסימאלי מכילה את G_0.
נניח כי קיימת קבוצה חוקית מגודל מקסימאלי P_{k-1}^* אשר מכילה את G_{k-1}, ומתקיים $P_{k-1}^*\setminus G_{k-1} \subseteq S_{k-1}$ ונראה כי קיימת קבוצה חוקית מגודל מקסימאלי P_k^* אשר מכילה את G_k וכי $P_k^*\setminus G_k \subseteq S_k$:

- אם $i_k \in P_{k-1}^*$, אזי $G_k = G_{k-1} \cup \{i_k\} \subseteq P_{k-1}^*$, ולכן $P_k^* = P_{k-1}^*$.
נראה ש-$P_k^*\setminus G_k \subseteq S_k$: נשים לב ש $i_k = (P_{k-1}^*\setminus G_{k-1}) \setminus (P_k^*\setminus G_k)$ וגם $Collide(i_k) = S_{k-1}\setminus S_k$, כלומר האיבר היחיד שיצא מהקבוצה $P_{k-1}^*\setminus G_{k-1}$ יצא גם מS_k. הטענה מתקיימת.
- אחרת, $i_k \notin P_{k-1}^*$, ובהכרח קיימת פעילות $p \in P_{k-1}^*$ המתנגשת עם i_k (אם לא קיימת פעילות כזו, אזי $P_{k-1}^* \cup \{i_k\}$ הייתה חוקית, בסתירה למקסימאליות של P_{k-1}^*). כעת נראה כי הקבוצה $P_k^* = P_{k-1}^* \setminus \{p\} \cup \{i_k\}$ היא קבוצת פעילויות חוקית מגודל מקסימאלי אשר מכילה את G_k:
ידוע כי כל הפעילויות ב-P_{k-1}^* אינן מתנגשות אחת עם השנייה, ולכן נותר להראות שכל הפעילויות ב- $P_{k-1}^* \setminus \{p\}$ אינן מתנגשות עם i_k:
מכיוון ש-$p \in P_{k-1}$, היא אינה מתנגשת עם אף פעילות ב-G_{k-1}. כמו כן, $p \notin G_k$. לפי האבחנה וכיוון ש-p מתנגשת עם i_k, מתקיים $f_p \leq_{[2]} f_{i_k} \leq_{[1]} s_p \leq f_{i_{k-1}}$.
   - לכל פעילות $p' \in P_{k-1}^* \setminus \{p\}$ אשר מקיימת $f_p \leq s_{p'}$, לפי [2] מתקיים $f_{i_k} \leq s_{p'}$ ולכן p' לא מתנגשת עם i_k.
   - לכל פעילות$p' \in P_{k-1}^* \setminus \{p\}$ אשר מקיימת $s_{p'} < f_p$: מכיוון ש-p' ו-p אינן מתנגשות ברור כי $f_{p'} \leq s_p$. מצירוף של [1] נובע כי $f_{p'} \leq f_{i_k}$. לפי האבחנה בהכרח $p' \in G_{k-1}$ ולכן $f_{p'} \leq f_{i_{k-1}}$.מכאן ש-p' לא מתנגשת עם i_k.

כיוון ש- $p \notin G_{k-1}$ בקלות ניתן לראות כי $G_k \subseteq P_{k-1}^* \setminus \{p\} \cup \{i_k\} = P_k$.
התנאי ש $P_k^*\setminus G_k \subseteq S_k$ עדיין מתקיים מאותם השיקולים כמו במקרה הקודם. (עבור $P_k^* = P_{k-1}^* \setminus \{p\} \cup \{i_k\}$).
הראנו כי P_k היא קבוצה חוקית המכילה את G_k. כמו כן $|P_k^*| = |P_{k-1}^*|$ ולכן P_k^* מקסימאלית. ■

הוכחת נכונות 2:

סימונים:

- $G = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ - הפתרון שהאלגוריתם החמדן החזיר עפ"י סדר הבחירה.
- $O = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ - פתרון אופטימאלי כלשהו הממוין עפ"י זמן סיום הפעילויות, כלומר $f_{j_1} \le f_{j_2} \le \dots \le f_{j_m}$.

אינטואיציה:

בכל פעם אנו בוחרים בפעילות עם זמן הסיום המוקדם ביותר וכך מאפשרים ליותר פעילויות להתקיים בהמשך. נוכיח כי הפעילות i_l בקבוצת הפעילויות G שהאלגוריתם מחזיר, מסתיימת לפני הפעילות j_l בפתרון האופטימאלי O.

טענה עיקרית: הקבוצה G המוחזרת ע"י האלגוריתם היא קבוצת פעילויות חוקית מגודל מקסימאלי.

טענת עזר: לכל l, $f_{i_l} \le f_{j_l}$. ז"א הפעילות ה-l-ית בקבוצת הפעילויות G שהאלגוריתם מחזיר, מסתיימת לא אחרי הפעילות ה-l -ית בפתרון האופטימאלי O.

הוכחת הטענה העיקרית:

חוקיות: לאחר הוספת פעילות ל- G כל הפעילויות המתנגשות עימה מוצאות מקבוצת הפעילויות הנותרות, S. לכן בכל פעם שמתווספת ל-G פעילות מ- S היא אינה מתנגשת עם אף אחת מהפעילויות שנבחרו עד כה ב- G.
אופטימאליות: נשים לב כי כיוון ש-O הוא פיתרון אופטימאלי, אזי $m \ge k$. עלינו להראות כי $m = k$.
נניח בשלילה ש $m > k$ ונסתכל על הפעילות ה $k+1$ ב O, j_{k+1}. מטענת העזר נובע כי $f_{i_k} \le f_{j_k}$. לכן, מכיוון שהפעילויות בO ו G מסודרות על פי זמני סיום, לכל פעילות i_r ב G מתקיים:
$f_{i_r} \le f_{i_k} \le f_{j_k} \le s_{j_{k+1}}$. לפיכך, לכל פעילות i_r ב G, $j_{k+1} \notin collide(i_r)$. יוצא שהפעילות j_{k+1} לא הוצאה מ S במהלך הריצה, בסתירה לכך שהלולאה הסתיימה לאחר k איטרציות. ■

הוכחת טענת עזר באינדוקציה על l:

בסיס: $l = 1$. הפעילות i_1 מסתיימת ראשונה מבין כל הפעילויות, ובפרט $f_{i_1} \le f_{j_1}$.
צעד האינדוקציה: הנחת האינדוקציה היא $f_{i_l} \le f_{j_l}$. נוכיח כי $f_{i_{l+1}} \le f_{j_{l+1}}$.
היות וכל הפעילויות ב-O אינן חותכות, אזי $f_{i_l} \le_{[1]} f_{j_l} \le_{[2]} s_{j_{l+1}}$ ([1] – הנחת האינדוקציה. [2] – זרות).
כלומר הפעילות j_{l+1} מתחילה אחרי סוף פעילות i_l ולכן עדיין נמצאת ב-S בזמן ש-i_{l+1} נבחרת. מכיוון שהאלגוריתם החמדן בחר בצעד ה- $l+1$ את פעילות i_{l+1} (החמדן בוחר בכל צעד פעילות עם זמן סיום מינימאלי ב- S) מתקיים כי $f_{i_{l+1}} \le f_{j_{l+1}}$. ■

הערה: זמן הריצה של האלגוריתם האיטראטיבי במימוש נאיבי הינו $O(n^2)$ כאשר n הינו מספר, שכן זמן מימוש נאיבי של מציאת $Collide(i)$ הינו $\Omega(n)$ וישנן לכל היותר n קריאות.

<u>אלגוריתם רקורסיבי</u>

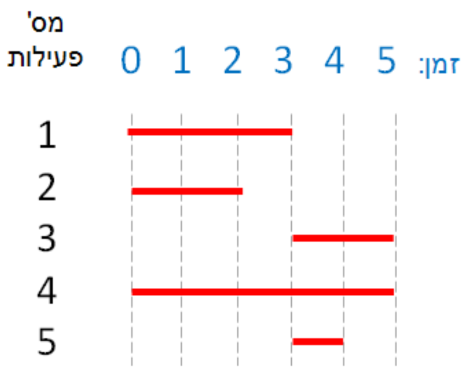
גם בגרסא הרקורסיבית נשתמש לצורך הבחירה החמדנית באותו קריטריון שבו השתמשנו בגרסא האיטראטיבית.

נגדיר $A \supseteq Collide(i)$ כקבוצת הפעילויות ב- A אשר מתנגשות עם פעילות $i \in A$, כולל i עצמה.

Activity_Rec (A)

- If $A = \emptyset$
  - *Return* $\emptyset$
- *else*
  - $i \leftarrow$ *index of an activity in A with earliest finishing time*
  - $A \leftarrow A \setminus Collide(i)$
- *Return* $\{i\} \cup Activity\_Rec(A)$

<u>דוגמא:</u>



A={1,2,3,4,5}

i	1	2	3	4	5
s_i	0	0	3	0	3
f_i	3	2	5	5	4

ראו דוגמאת ריצה באתר.

בדוגמא זו הפתרון שיתקבל מהפעלת האלגוריתם האיטראטיבי יהיה קבוצה המכילה את פעילויות 2 ו- 5.

<u>הוכחת נכונות:</u>

<u>טענה עיקרית</u>: הפונקציה הרקורסיבית מחזירה תת-קבוצה חוקית של A מקסימאלית בגודלה.

<u>טענה 1</u>: (נכונות הבחירה החמדנית)

תהי B קבוצת פעילויות לא ריקה. תהי $j \in B$ הפעילות עם זמן סיום מוקדם ביותר ב- B.
אזי קיימת קבוצה חוקית מקסימאלית P^* ביחס ל-B ($P^* \subseteq B$) המכילה את j.

<u>טענה 2</u>: (נכונות מבנה הרקורסיה)

תהי B קבוצת פעילויות לא ריקה. תהי P^*, $P^* \subseteq B$ קבוצה חוקית מקסימאלית המכילה את הפעילות $x \in P^*$, אזי תת הפתרון $P^* \setminus \{x\}$ הוא קבוצה חוקית מקסימאלית עבור בעיית הפעילויות מתוך הקבוצה $B \setminus Collide(x)$.

<u>אבחנה</u>: הקבוצה $Collide(i)$ אינה ריקה ולכן $|Collide(i)| \geq 1$. (כל פעילות מתנגשת עם עצמה)

<u>הוכחת הטענה הראשית</u>: באינדוקציה שלמה על גודל הקבוצה A.

(**) אנו משתמשים באינדוקציה שלמה כיוון שגודל הקבוצה A קטן בלפחות 1 לאחר כל צעד.
- בסיס:$0 = |A|$. תנאי העצירה מתקיים כאשר $A = \emptyset$. אז מוחזרת $\emptyset$, שהיא אכן קבוצה חוקית מקסימאלית המוכלת ב-A. מכיוון ש- A סופית ובכל צעד היא קטנה ממש, לאחר לכל היותר $|A|$ צעדים יתקיים תנאי זה.
- צעד: נניח את נכונות הטענה עבור כל קלט A כך ש- $|A| < k$, ונוכיח עבור המקרה שבו $|A| = k$:
נסמן ב- i את הפעילות שנבחרה ע"י האלגוריתם בשלב הנוכחי (בו $|A| = k$).
נסמן ב-Q^* את הפלט של הקריאה הרקורסיבית עם הקלט $A \setminus Collide(i)$.
(אנו רוצים להוכיח את הטענה עבור תת הקבוצה המוחזרת בשורה האחרונה,$Q^* \cup \{i\}$)
- **חוקיות**: מהאבחנה נובע כי הקלט $A \setminus Collide(i)$ קטן ממש בגודלו מ- A. לכן לפי הנחת האינדוקציה, Q^* היא תת-קבוצה חוקית מקסימאלית בגודלה של $A \setminus Collide(i)$. כמו כן, מהגדרת $Collide(i)$, אף פעילות ב- Q^* לא מתנגשת עם הפעילות i, ולכן גם הקבוצה $Q^* \cup \{i\}$ היא קבוצת פעילויות חוקית.
- **מקסימאליות**: נסמן ב- P^* קב' פעילויות חוקית מקסימאלית,$P^* \subseteq A$, המכילה את i. קיומה מובטח עפ"י טענה 1. מטענה 2 נובע כי $P^*\setminus\{i\}$ היא קבוצה חוקית מקסימאלית עבור בעיית הפעילויות מתוך הקבוצה $A \setminus Collide(i)$. שתי הקבוצות Q^* ו- $P^*\setminus\{i\}$ מגודל מקסימאלי עבור $A \setminus Collide(i)$ (Q^* מקס' מהנחת האינדוקציה ו- $P^*\setminus\{i\}$ מקס' מטענה 2), לכן גודלן שווה ולכן $|Q^*| = P^*\setminus\{i\} = |P^*| - 1$.
לכן, $|P^*| = (|P^*| - 1) + 1 = |Q^*| + 1 = |Q^* \cup \{i\}|$.
מהמקסימאליות של P^* נובע כי גם $Q^* \cup \{i\}$ היא תת-קבוצה חוקית של A מגודל מקסימאלי.
(סוף צעד האינדוקציה).
- מכיוון שטענת האינדוקציה הוכחה לכל $|A|$ היא נכונה גם עבור השלב ההתחלתי, בו A מכילה את כל הפעילויות. לכן הפונקציה הרקורסיבית מחזירה תת-קבוצה חוקית של A מקסימאלית בגודלה. ■

<u>הוכחת טענה 1</u>:

תהי $P^{**} \subseteq B$ תת-קבוצה חוקית מקסימאלית של B. אם P^{**} מכילה את j סיימנו. אחרת P^{**} אינה מכילה את j. תהי x הפעילות בעלת זמן הסיום המינימאלי מבין כל הפעילויות ב- P^{**}. מכיוון שהפעילויות ב-P^{**} אינן מתנגשות, אז כל פעילות $y \in P^{**} \setminus \{x\}$ מקיימת $f_x \leq s_y$. בנוסף, לפי אופן בחירתה של j, מתקיים $f_j \leq f_x$. בסה"כ, לכל $y \in P^{**} \setminus \{x\}$ מתקיים $f_j \leq s_y$, כלומר j אינה מתנגשת עם אף פעילות ב-$P^{**} \setminus \{x\}$, לכן אם נוציא את x ונכניס במקומה את j, נישאר עם קבוצה חוקית שגודלה לא השתנה.
כלומר, $P^* = P^{**}\setminus\{x\} \cup \{j\}$ היא תת-קבוצה של B מגודל מקסימאלי, המכילה את j, כנדרש. ■

<u>הוכחת טענה 2</u>:

תהי $P^* \subseteq B$ קבוצה חוקית מקסימאלית המכילה את הפעילות x.
חוקיות: מכיוון ש- P^* היא קבוצת פעילויות חוקית, הרי גם הקבוצה $P^* \setminus \{x\}$ היא קבוצת פעילויות חוקית. $(P^* \setminus \{x\}) \cap Collide(x) = \emptyset$ מכיוון ש- $x \in P^*$ ואין ב-P^* פעילויות שמתנגשות עם x (פרט ל- x עצמה). לכן $P^* \setminus \{x\}$ היא תת קבוצה חוקית של $B \setminus Collide(x)$.
מקסימאליות: נניח בשלילה כי $P^* \setminus \{x\}$ אינה מגודל מקסימאלי עבור $B \setminus Collide(x)$, כלומר קיימת Q, תת-קבוצה חוקית של $B \setminus Collide(x)$ כך ש- $|Q| > |P^* \setminus \{x\}| = |P^*| - 1$. אף פעילות ב-Q אינה מתנגשת עם x, ולכן $Q \cup \{x\}$ היא תת-קבוצה חוקית של B. כמו כן, $|Q \cup \{x\}| = |Q| + 1 > |P^*|$, בסתירה למקסימאליות של P^*. ■

<u>הערה</u>: האלגו' החמדן פועל בצורה דומה לאלגו' האיטראטיבי הראשון שראינו. לכן זמן הריצה של האלגוריתם הרקורסיבי גם הוא $O(n^2)$ כאשר n הינו מספר הפעילויות.

<u>הערה</u>: שימו לב לתכונה הקיימת באלגוריתם החמדן:
לאחר כל שלב באלגוריתם, קבוצת הפעילויות הנותרות קטנה ממש. אנו נשארים עם בעיה קטנה יותר, הדומה לבעיה המקורית. בשני האלגוריתמים שהוצגו עד כה תכונה זו נראית באופן ברור.
באלגוריתם הבא תכונה זו קיימת באופן חבוי. נציין כי באופן כללי, באלגוריתמים חמדניים, תכונה זו תמיד קיימת.

מציאת $Collide(i)$ לא חייבת להיעשות באופן מפורש. ניתן לשפר את האלגוריתם באופן כזה שזמן הריצה יהיה קצר יותר, כפי שנראה מיד.

הגרסא הבאה של אלגוריתם *Activity_Iter* שקולה לגמרי לזו שראינו. <u>בגרסא זו אין מחשבים את $Collide(i)$ באופן מפורש</u>, אלא חישוב $Collide(i)$ נעשה למעשה ע"י כך שמכניסים פעילות ל- G רק אם היא אינה מתנגשת עם פעילות קודמת, כלומר אינה ב- $Collide(i)$ עבור האינדקס i האחרון שנוסף ל- G.

$\boldsymbol{Activity\_Iter\_2}$ $(\boldsymbol{A})$

- $G \leftarrow \emptyset$
- $S \leftarrow A$
- $f \leftarrow 0$
- *While* $S \neq \emptyset$ *do:*
  - $i \leftarrow$ index of an activity in S with the earliest finishing time
  - $S \leftarrow S \setminus \{i\}$
  - *if* $s_i \geq f$ then:
    - $G \leftarrow G \cup \{i\}$
    - $f \leftarrow f_i$
- Return G

<u>ניתוח זמן ריצה</u> של האלגוריתם $\boldsymbol{Activity\_Iter\_2}$ $(\boldsymbol{A})$:

כדי לנתח את זמן הריצה של האלגוריתם, יש לענות על השאלה כיצד נאפשר בכל שלב את בחירתה של פעילות בעלת זמן סיום מינימאלי מבין כל אלו שעדיין לא נבדקו, באופן יעיל?
פתרון אחד הוא לבצע מיון מקדים של כל הפעילויות ב- S בסדר עולה של זמני סיום. זה יוסיף לזמן הריצה מחובר של $O(nlogn)$.

פתרון שני, להשתמש בערימת-מינימום שבה המפתחות הם זמני הסיום של הקטעים. בניית הערימה נעשית ב- $O(n)$ פעולות, וכל שליפה דורשת $O(logn)$ פעולות, ובסה"כ עבור $O(n)$ שליפות נזדקק ל- $O(n\log n)$ פעולות. בסה"כ גם שימוש בערימה יוסיף לזמן הריצה מחובר של $O(nlog(n))$..

לכן מתקבל כי:
מיון מקדים כנ"ל: $O(nlog(n))$..
תנאי הלולאה מתקיים בדיוק n פעמים, כאשר בכל פעם מתבצע מספר קבוע של פעולות, לכן זמן הרצת הלולאה: $O(n)$.
בסה"כ נקבל $O\big(nlog(n)\big) + O(n) = O(nlog(n))$.

- ההוכחה דומה מאוד להוכחות הקודמות. הרעיון הוא שבהינתן פתרון אופטימלי P^* נקח את הפעילות הראשונה ששונה מזאת ב-G המוחזר ע"י האלגוריתם. ומראים שניתן להחליף את הפעילויות ולהישאר עם פתרון חוקי. האופטימליות נובעת מכך שגודל P^* לא השתנה.