תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

סמסטר ב' תשע"ד

מועד א – 27.8.2014

**ללא חומר עזר**

הנחיות חשובות:

- בטופס הבחינה 4 עמודים מלבד עמוד זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
- המבחן הינו ללא חומר עזר.
- משך המבחן 3½ שעות.
- סה"כ נקודות 100.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת הטיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.** מחברת הטיוטא מיועדת לגריסה!
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- המבחן מורכב מ- 4 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס או לניקוד אין בהכרח קשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- מותר להשתמש באלגוריתמים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה **מעבודות הבית** דורשת הוכחה מלאה.
- ניתן להסתמך על טענות ומשפטים מהכיתה ומהתירגולים, אך יש לנסח אותם במדויק.
- **אם לא מצוין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא וברור.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתך לפני הגשתה.

# בהצלחה!

**<u>הגדרה</u> (עבור שאלות 1 ו- 2):**
בהינתן גרף $G = (V, E)$ וקבוצת קדקודים $F \subseteq V$, <u>הגרף המושרה</u> מ- $G$ ע"י $F$ הוא $G_F = (F, E_F)$ כך ש- $E_F = \{(u, v) \in E : u, v \in F\}$.
כלומר $G_F$ הוא תת גרף של $G$ הבנוי רק מקודקודי $F$ והצלעות המחברות קדקודים אלו.

# <u>שאלה 1 [20 נקודות – שאלת נכון/לא נכון]</u>

נגדיר את בעיית <u>העפ"מ המושרה</u>:

**קלט:** גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$, וחלוקה[1] של $V$ לקבוצות $F_1, F_2, \dots, F_r$ כך שלכל $1 \le i \le r$ הגרף המושרה מ- $G$ ע"י $F_i$ הוא גרף קשיר.

**פתרון חוקי:** $T$ עץ פורש של $G$ כך שלכל $1 \le i \le r$ הגרף המושרה מ- $T$ ע"י $F_i$ הוא גרף קשיר (כלומר עץ).

**יש למצוא:** פתרון חוקי במשקל מינימלי.

בכל אחד מהסעיפים הבאים מופיעה טענה. **קבעו האם הטענה נכונה או לא** <u>ונמקו תשובתכם באופן תמציתי</u>. במידה וקבעתם שהטענה לא נכונה ספקו דוגמא נגדית מנומקת.
שימו לב: תשובות נכונות ללא נימוק מספק לא יזכו לניקוד.

### סעיף א [6 נקודות – נכון/לא נכון]

נסמן $B = \{(u, v) \in E \;:\; \exists i \neq j \text{ such that } u \in F_i \text{ and } v \in F_j\}$. כלומר $B$ מכילה כל צלע של $G$ ששני הקצוות שלה נמצאים בקבוצות $F_i, F_j$ שונות.
אזי כל פתרון חוקי $H = (V, E_H)$ מקיים $|E_H \cap B| = r - 1$
($r$ הוא מספר הקבוצות בחלוקה של $V$).

### סעיף ב [7 נקודות – נכון/לא נכון]

האלגוריתם הבא מחזיר פתרון חוקי.

- מצא $H = (V, E_H)$ עפ"מ של $G$.
- לכל $i$, מחק מ- $E_H$ את קבוצת הצלעות של $G_{F_i}$ (הגרף המושרה מ- $G$ ע"י $F_i$).
- לכל $i$, מצא עפ"מ של $G_{F_i}$ והוסף את צלעותיו ל- $E_H$.
- החזר את $H = (V, E_H)$.

### סעיף ג [7 נקודות – נכון/לא נכון]

אם $H$ הוא פתרון חוקי ואופטימלי, אזי לכל $i$ מתקיים: $H_{F_i}$ (הגרף המושרה מ- $H$ ע"י $F_i$) הוא עפ"מ של $F_i$.

[1] תזכורת: $F_1, \dots, F_r$ הם חלוקה של $V$ אם"ם $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_r = V$ ולכל $i \neq j$ מתקיים ש- $F_i \cap F_j = \emptyset$.

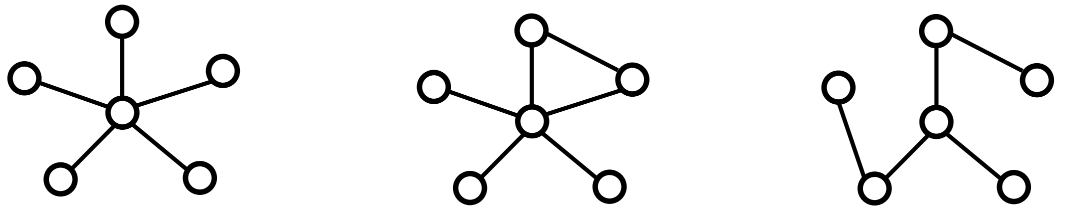
# שאלה 2 [25 נקודות]

**הגדרה:** נאמר שגרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא כוכב, אם קיים $v \in V$ כך ש-

$$E=\{(v,u) : u \in (V \setminus \{v\})\}$$

בנוסף, נאמר שגודל הכוכב הוא $|V|$.

לדוגמא, הגרף הימני והגרף האמצעי הם לא כוכבים, והגרף השמאלי הוא כוכב (בגודל 6).



נגדיר את השפה הבאה:

$$\text{STAR}=\left\{G,k \ : \begin{array}{c} \text{גרף לא מכוון } G=(V,E) \\ \text{קיימת קבוצת קדקודים } F\subseteq V \\ \text{כך שהגרף המושרה } G_F \\ \text{הוא כוכב בגודל לפחות } k \end{array}\right\}$$

הראו כי STAR היא NP-שלמה.

רמז: קבוצה בלתי תלויה (Independent Set).

# שאלה 3 [25 נקודות]

### סעיף א [15 נקודות]

נגדיר את בעיית הניתוק המינימלי:

**קלט:** גרף מכוון $G=(V,E)$, קדקוד מקור $s \in V$, וקדקוד יעד $t \in V$ כך שקיים מסלול ב- $G$ מ- $s$ ל- $t$.

**פתרון חוקי:** קבוצת צלעות $F\subseteq E$ שהסרתה מהגרף מנתקת את $t$ מ- $s$. כלומר, $F\subseteq E$ כך שבגרף $H=(V,E\setminus F)$ אין מסלול מ- $s$ ל- $t$.

**יש למצוא:** פתרון חוקי עם מספר מינימלי של צלעות.

הראו אלגוריתם לבעיית הניתוק המינימלי, הוכיחו את נכונותו ונתחו את זמן הריצה.
שימו לב: החסם שתתנו לזמן הריצה ישפיע על הציון.

רמז: השתמשו בחומר הנלמד בקורס בנושא זרימה.

**סעיף ב [10 נקודות]**

בהינתן גרף מכוון $G$ וזוג קודקודים $u, v$, נסמן:

$$p_G(u,v) = \begin{cases} \text{אורך (במספר צלעות) של מסלול קצר ביותר מ } u \text{ ל } v & , \quad \text{אם קיים מסלול מ } u \text{ ל } v \text{ ב } G \\ \infty & , \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

נגדיר את בעיית <u>ההרחקה המינימלית</u>:

**קלט:** גרף מכוון $G = (V, E)$, קדקוד מקור $s \in V$, וקדקוד יעד $t \in V$ כך שקיים מסלול ב- $G$ מ- $s$ ל- $t$.

**פתרון חוקי:** קבוצת צלעות $F \subseteq E$ שהסרתה מהגרף מגדילה את המרחק של $t$ מ- $s$. כלומר, $F \subseteq E$ כך ש- $p_H(s,t) > p_G(s,t)$ כאשר $H = (V, E \setminus F)$.

**יש למצוא:** פתרון חוקי עם מספר מינימלי של צלעות.

הראו אלגוריתם לבעיית ההרחקה המינימלית, ונתחו את זמן הריצה שלו. אין צורך בהוכחת נכונות.

# <u>שאלה 4 [30 נקודות – שאלת נכון/לא נכון]</u>

היזכרו בבעיית המסלולים הקלים ביותר, ובאלגוריתם הגנרי (מבוסס Relax) שראינו בכיתה:

**קלט:** גרף $G = (V, E)$ מכוון, פונקציית משקל $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ כך שאין ב- $G$ מעגלים עם משקל שלילי, וקודקוד מקור $s \in V$.

**יש למצוא:** עץ מסלולים קלים ביותר מ- $s$ לכל קודקוד $v \in V$.

**האלגוריתם:**

(1) אתחל $d[s] = 0$ ו- $\Pi[s] = \mathrm{NIL}$.

(2) לכל $v \in (V \setminus \{s\})$ אתחל $d[v] = \infty$ ו- $\Pi[v] = \mathrm{NIL}$.

(3) כל עוד קיימת קשת $(u,v) \in E$ כך ש- $d[v] > d[u] + w(u,v)$ בצע:

א. בחר (בצורה שרירותית) קשת $(u,v)$ כנ"ל ובצע $\mathrm{Relax}(u,v)$.

(4) החזר את $d[\cdot]$ ואת $\Pi[\cdot]$.

בסעיפים הבאים ניתן להסתמך על הטענה הבאה מהקורס:
בכל שלב בריצה, לאחר ביצוע פעולת $\mathrm{Relax}(u,v)$ בשלב 3א, קיים מסלול פשוט $P$ מ- $s$ ל- $v$ כך ש- $d[v] = w(P)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים מופיעה טענה. **קבעו האם הטענה נכונה או לא** ונמקו תשובתכם באופן תמציתי. במידה וקבעתם שהטענה לא נכונה ספקו דוגמא נגדית מנומקת.
שימו לב: תשובות נכונות ללא נימוק מספק לא יזכו לניקוד.

**סעיף א [6 נקודות – נכון/לא נכון]**

בכל שלב בריצה, לאחר ביצוע פעולת $\mathrm{Relax}(u,v)$ בשלב 3א, קיים מסלול פשוט מ- $s$ ל- $v$ $P=(s=u_0,u_1,u_2,\dots,u_k=v)$ כך ש-

$$d[s]=0$$
$$\forall (u_i,u_{i+1})\in P\ :\ \ d[u_{i+1}]=d[u_i]+w(u_i,u_{i+1})$$

**סעיף ב [10 נקודות – נכון/לא נכון]**

מספר האיטראציות של האלגוריתם הנתון בשאלה הוא לכל היותר $|V|!$.

**סעיף ג [8 נקודות – נכון/לא נכון]**

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון, קודקוד מקור $s\in V$, ושתי פונקציות משקל $w_1,w_2$ ללא מעגלים שליליים. בנוסף, נתון שקיימת צלע $e\in E$ עבורה $w_2(e)<w_1(e)$, ולכל $e'\neq e$ מתקיים $w_2(e')=w_1(e')$.

נריץ את האלגוריתם הנתון בשאלה על $G,s,w_1$. לאחר מכן נריץ את האלגוריתם על $G,s,w_2$ ללא צעדים (1),(2). כלומר בתחילת הריצה על $G,s,w_2$ המערכים $\Pi[\cdot],d[\cdot]$ מאותחלים כפי שהם בסיום הריצה על $G,s,w_1$.
אזי בריצה על $G,s,w_2$ ייתכנו לכל היותר $|V|$ איטראציות.

**סעיף ד [6 נקודות – נכון/לא נכון]**

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון, קודקוד מקור $s\in V$, ופונקציית משקל $w$ ללא מעגלים שליליים.
נריץ את האלגוריתם הנתון בשאלה על $G,s,w$ כאשר צעד (1) מוחלף ב:
(1) אתחל $d[s]=10$ ו- $\Pi[s]=\mathrm{NIL}$.

אזי הפלט של האלגוריתם הוא עץ מסלולים קלים ביותר מ- $s$ עבור הגרף $G$ ופונקציית המשקולות $w':E\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$\forall e\in E:\ \ w'(e)=w(e)+10$$

# בהצלחה!