תכנון אלגוריתמים 202-1-2041
דפי עזר למבחן

האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal)

קלט: $G = (V, E), w$.

1. אתחל $B \leftarrow \emptyset, C \leftarrow E$,
2. כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
   2.1. הוצא צלע זולה ביותר מ- C, נקרא לה e
   2.2. אם e אינה יוצרת מעגל עם הצלעות ב- B אז $B \leftarrow B \cup \{e\}$
3. החזר את (V, B)

האלגוריתם של פרים (Prim)

קלט: $G = (V, E), w$.

1. בחר $r \in V$ כלשהו
2. אתחל $B \leftarrow \emptyset, S \leftarrow \{r\}$
3. כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
   3.1. תהי (u, v) צלע זולה ביותר מבין הקשתות $(u, v) \in E$ כך ש- $u \in S, v \notin S$
   3.2. $B \leftarrow B \cup \{e\}$
   3.3. $S \leftarrow S \cup \{v\}$
4. החזר את (V, B)

האלגוריתם של Dijkstra

```
RELAX(u, v, w)
if d[v] > d[u] + w(u, v) then
    d[v] ← d[u] + w(u, v)
    π[v] ← u
```

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for each vertex v ∈ V do
    d[v] ← ∞
    π[v] ← NIL
d[s] ← 0
```

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S ← Ø
Q ← V
while Q ≠ Ø do
    u ← EXTRACT-MIN(Q)
    S ← S ∪ {u}
    for each vertex v in Q such that v∈ Adj[u] do
        RELAX(u, v, w)
```

BELLMAN-FORD (G,u,v)

Initialize-Single-Source(G,s)
for $i \leftarrow 0$ to $|V|-1$ do
  for each edge $(u,v) \in E$ do
    Relax(u,v,w)
for each edge $(u,v) \in E$ do
  if $d[v] > d[u] + w(u,v)$ then
    return FALSE
return TRUE

FLOYD_WARSHALL(G)

$d_{i,j}^{(0)} = \begin{cases} w(i,j) & (v_i,v_j) \in E \\ 0 & i = j \\ \infty & otherwise \end{cases}$
for $k \leftarrow 1$ to $|V|$ do
  for $i \leftarrow 1$ to $|V|$ do
    for $j \leftarrow 1$ to $|V|$ do
      $d_{i,j}^{(k)} = d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)}$
Return D

אלגוריתם DFS

***DFS*(*G*)**

For each vertex $u \in V$ do
  $color[u] = WHITE$
  $\pi[u] \leftarrow$ NIL
$time \leftarrow 0$
For each vertex $u \in V$
  If $color[u] = WHITE$ then
    $DFS\text{-}VISIT(u)$

***DFS-VISIT*(u)**

$color[u] \leftarrow GRAY$
$d[u] \leftarrow time$; $time \leftarrow time + 1$
For each vertex $v \in Adj[u]$ do
  If $color[v] = WHITE$ then
    $\pi[v] \leftarrow u$
    $DFS\text{-}VISIT(v)$
$color[u] \leftarrow BLACK$
$f[u] \leftarrow time$; $time \leftarrow time + 1$

משפט המסלול הלבן: ביער DFS של גרף מכוון G, קדקוד v הוא צאצא של u אם ורק אם בזמן $d(u)$ קיים מסלול מ-u ל-v המכיל רק קודקודים לבנים (פרט ל- u).

זרימה

***FORD-FULKERSON* (*G* ,*c* ,*s*, *t*)**

initializes flow f to 0

while there exists an augmenting path p in G_f do

  $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ is in } p\}$

  $f(u,v) = f(u,v) + c_f(p) \qquad \forall (u,v) \in p$

  $f(v,u) = f(v,u) - c_f(p) \qquad \forall (v,u) \in p$

return f

Dinitz *(G, c, s, t)*

$f \leftarrow 0$;

construct the residual network $N_f = (G_f, c_f, s, t)$

  (where $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$ and $E_f = E \setminus \{(u,v) \mid c_f(u,v) = 0\}$);

while there is a path from s to t in G_f **do**

  construct the layered network $\mathcal{L}_f = (L_f, c_f, s, t)$;

  find a blocking flow g for $\mathcal{L}_f$;

  $f \leftarrow f + g$;

  construct the residual network N_f;

LayeredNetwork_Construction *(N_f)*

$V_0 \leftarrow \{s\}$; $i \leftarrow 0$;

while $(V_i \neq \varnothing)$ and $(t \notin V_i)$ **do**

  $V_{i+1} \leftarrow \varnothing$; $E_{i+1} \leftarrow \emptyset$;

  for each $u \in V_i$ **do**

    for each $v \in V$ such that $(\langle u,v \rangle \in E_f)$ and $(v \notin V_j, \forall j \leq i)$ **do**

      if $(v \notin V_{i+1})$ **then** add v to V_{i+1} ;

      add $\langle u,v \rangle$ to E_{i+1} ;

  $i \leftarrow i+1$;

if $(V_i = \varnothing)$ **then**

  return $\mathcal{L}_f = (\varnothing, c_f, s, t)$

$L_f \leftarrow (V_L, E_L), where\ V_L = V_0 \cup \ldots \cup V_i, E_L = E_0 \cup \ldots \cup E_i$;

return $\mathcal{L}_f = (L_f, c_f, s, t)$;

BlockingFlow *(L_f)*

$g \leftarrow 0$
repeat
    find a path *p* from *s* to *t* in L_f by moving from *t* "backward" to *s*;
    let its bottleneck capacity be $c_f(p)$
    for each edge $\langle u,v\rangle \in p$ **do**
        $g(u,v) \leftarrow g(u,v) + c_f(p)$;
        $g(v,u) \leftarrow -g(u,v)$
        $c_f(u,v) \leftarrow c_f(u,v) - c_f(p)$
        if $c_f(u,v) = 0$ **then**
            remove $\langle u,v\rangle$ from L_f
            if *indegree (v) = 0* then
                CleanForward (*v*)
until *there is no path from s to t in* L_f

CleanForward *(u)*

if $u \neq t$ then
 for all *v* such that $\langle u, v\rangle \in E_L$ **do**
    remove $\langle u, v\rangle$ from E_L
    if *indegree (v) = 0* **then**
        CleanForward *(v)*

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041
דפי עזר למבחן

רשימת בעיות NP-שלמות

<u>הגדרה:</u>
נוסחת CNF היא נוסחה בוליאנית, כאשר בין הפסוקיות יש פעולת AND וכל פסוקית היא OR של ליטרלים.

SAT :
<u>מופע:</u>
נוסחה בצורת CNF, עם משתנים $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
<u>שאלה:</u>
האם יש השמה למשתנים המספקת את הנוסחה?

3SAT :
<u>מופע:</u>
נוסחה בצורת 3-CNF (שלשה ליטרלים בדיוק בכל פסוקית).
<u>שאלה:</u>
האם יש השמה למשתנים המספקת את הנוסחה?

NAE-K-SAT :
<u>מופע:</u>
נוסחה בצורת k-CNF (k ליטרלים בכל פסוקית).
<u>שאלה:</u>
האם יש השמה למשתנים המספקת את הנוסחה, כך שבכל פסוקית יש לפחות ליטרל אחד שערכו $true$ בהשמה ולפחות ליטרל אחד שערכו $false$ בהשמה?

Clique :
<u>מופע:</u>
גרף לא-מכוון G, ומספר טבעי k.
<u>שאלה:</u>
האם יש ב- G קבוצה של k קדקודים לפחות כך שבין כל שני קודקודים בקבוצה יש צלע?

Independent-Set :
<u>מופע:</u>
גרף לא-מכוון G, ומספר טבעי k.
<u>שאלה:</u>
האם יש ב- G קבוצה של k קדקודים לפחות כך שבין כל שני קודקודים בקבוצה אין צלע?

Vertex-Cover :
<u>מופע:</u>
גרף לא-מכוון $G=(V,E)$, ומספר טבעי k.
<u>שאלה:</u>
האם יש ב- G קבוצה של לכל היותר k קדקודים $C \subseteq V$, כך שעבור כל צלע $(u,v) \in E$ מתקיים לפחות אחד התנאים הבאים: $u \in C$ או $v \in C$?

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041
דפי עזר למבחן

Set-Cover :

<u>מופע:</u>
קבוצות $A=\{A_1,A_2,...,A_n\}$, קבוצת איברים $U=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,
ומספר טבעי k.
<u>שאלה:</u>
האם קיימת תת-קבוצה $I\subseteq\{1,...,n\}$ בגודל לכל היותר k, כך ש- $\bigcup_{i\in I}A_i$?

KnapSack :

<u>מופע:</u>
אברים $\{a_1,a_2,...,a_n\}$, קבוצת משקלים $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$, קבוצת מחירים
$\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$, ומספרים טבעיים W,P.
<u>שאלה:</u>
האם קיימת תת-קבוצה של איברים B, כך ש: $\sum_{a_i\in B}w_i\le W$ ו- $\sum_{a_i\in B}p_i\ge P$?

Ham-Path :

<u>מופע:</u>
גרף מכוון $G=(V,E)$ וקודקודים s,t.
<u>שאלה:</u>
האם קיים ב- G מסלול פשוט עם $|V|$ קודקודים המתחיל בקודקוד s ונגמר בקודקוד t?

Ham-Cycle :

<u>מופע:</u>
גרף מכוון $G=(V,E)$.
<u>שאלה:</u>
האם קיים ב- G מעגל עם $|V|$ קודקודים, כך שכל קודקוד מופיע בדיוק פעם אחת במעגל?

Partition :

<u>מופע:</u>
סדרת מספרים טבעיים $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$.
<u>שאלה:</u>
האם קיימת קבוצת אינדקסים $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ כך ש-
$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}\setminus I}a_i=\frac{1}{2}\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}}a_i$?

Subset-Sum :

<u>מופע:</u>
סדרת מספרים טבעיים $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, ומספר טבעי W.
<u>שאלה:</u>
האם קיימת קבוצת אינדקסים $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ כך ש- $\sum_{i\in I}a_i=W$?

3-Coloring :

<u>מופע:</u>
גרף לא-מכוון $G=(V,E)$.
<u>שאלה:</u>
האם קיימת צביעה של קודקודי G בשלושה צבעים, כך שלכל צלע $(u,v)\in E$, הקודקודים u ו- v צבועים בצבעים שונים?

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041
דפי עזר למבחן

משפטים

משפט 1:

יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט ולא מכוון. התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. G קשיר וחסר מעגלים
2. G חסר מעגלים ו- $|E| = |V| - 1$
3. G קשיר ו- $|E| = |V| - 1$
4. ב-G יש מסלול פשוט יחיד בין כל זוג קודקודים

משפט 2:

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר, לא מכוון ופשוט. יהי $T = (V, F)$ עץ פורש של G ו-$e \notin F$.
אזי $H = (V, F \cup \{e\})$ מכיל מעגל יחיד ולכל צלע e' במעגל, הגרף
$T' = (V, F \cup \{e\} \setminus \{e'\})$ הוא עץ פורש של G.

משפט 3:

תהי $N = (G, c, s, t)$ רשת זרימה ו-f זרימה חוקית בה. אז התנאים הבאים שקולים:

א. אין מסלול שיפור מ-s ל-t ב-N_f

ב. f זרימת מקסימום

ג. קיים חתך S, T ב-N כך ש $c(S, T) = |f|$