מבחן מועד ב׳

תאריך הבחינה:	3.8.2015
שמות המרצים:	פרופ׳ עמוסביימל פרופ׳ יפים דיניץ מר רן טייג דר׳ עדן כלמטץ׳ מר אורי שטמר גב׳ מיכל שמש
שם הקורס:	תכנון אלגוריתמים
מספר הקורס:	202-1-2041
שנה:	2015 סמסטר: ב׳ מועד: ב׳
משך הבחינה:	**3.5 שעות**
חומר עזר:	**אסור**

אנא קראו היטב את ההוראות שלהלן:

- בטופס הבחינה ארבעה עמודים כולל עמוד זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
- המבחן הינו ללא חומר עזר.
- משך המבחן 3.5 שעות.
- סה״כ 100 נקודות.
- פתרו את המבחן במחברת הטיוטה. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.** מחברת הטיוטה מיועדת לגריסה!
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- המבחן מורכב מ-4 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס או לניקוד אין בהכרח קשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- מותר להשתמש באלגוריתמים ידועים (כולל מתרגולים) מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה **מעבודות הבית** דורשת הוכחה מלאה.
- **ניתן להשתמש בטענות של סעיפים קודמים אפילו אם לא פתרתם אותם.**
- ניתן להסתמך על טענות ומשפטים מהכיתה ומתרגולים, אך יש לנסח אותם במדויק.
- **אם לא מצוין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא וברור.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתכם לפני הגשתה.

בהצלחה!

שאלה 1: [25 נקודות]

הוכיחו או הפריכו בקצרה את הטענה המופיעה בסוף כל אחד מהסעיפים הבאים.

סעיף א [9 נקודות]

בבעייה Max-Spanning-Tree, נתון גרף ממושקל, לא מכוון, וקשיר, ומספר k, ויש לקבוע האם קיים עץ פורש בגרף כך שסכום משקלות הקשתות הוא *לפחות* k.

<u>טענה</u>: אם Max-Spanning-Tree היא NP-קשה, אזי $P = NP$.

סעיף ב [8 נקודות]

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$. נתון כי אין מעגלים מכוונים ב-G, וקיים קודקוד $s \in V$ כך שלכל $v \in V$ קיים מסלול מכוון מ-s ל-v שאורכו (מספר הקשתות בו) לכל היותר k.

<u>טענה</u>: אם באלגוריתם בלמן פורד כפי שמופיע בדפי העזר נחליף את שורה 2 בשורה הבאה:

2. for $i \leftarrow 1$ to k do

אזי בסיום האלגוריתם, לכל קודקוד $v \in V$, הערך $d[v]$ יהיה בדיוק משקל מסלול קל ביותר מ-s ל-v. (דהיינו, אלגוריתם בלמן פורד ימצא את כל המרחקים הקצרים ביותר מ-s תוך k איטרציות).

סעיף ג [8 נקודות]

סטודנט חרוץ חשב על בעיית Partition (המופיעה בדפי העזר), ומצא עבורה את נוסחת המבנה הבאה:

$$\text{OPT}(k,b) = \begin{cases} \text{True}, & \text{אם } k=0 \text{ וגם } b=0 \\ \text{False}, & \text{אם } k=0 \text{ וגם } b\neq 0 \\ \text{OPT}(k-1,b) \vee \text{OPT}(k-1,b-a_k), & \text{אם } k>0 \end{cases}$$

<u>הערות</u>:

- המופע הוא סדרת מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- $\text{OPT}(k,b)$ מוגדר להיות True אם״ם קיימת תת-קבוצה של המספרים $a_1, \ldots, a_k$ שסכומם בדיוק b.
- הפיתרון לבעייה המקורית הוא $\text{OPT}(n, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i)$.

<u>טענה</u>: אלגוריתם תכנון דינאמי רקורסיבי עם memoization (שיטת הפתקאות) המבוסס על הנוסחא הנ״ל ירוץ בזמן פולינומי ב-n.

שאלה 2: [20 נקודות]

בכל אחד מהסעיפים הבאים, הוכיחו אחת מהטענות הבאות:

- השפה נמצאת ב-P.
- השפה הינה NP-קשה (במקרה זה, *אין צורך להוכיח* שהשפה נמצאת ב-NP).

סעיף א [10 נקודות]

$$\text{Multi-SAT} = \{\varphi \text{ פסוק CNF מעל } n \text{ משתנים} \mid \text{קיימות לפחות } 2^{n/2} \text{ השמות מספקות שונות ל-}\varphi\}$$

סעיף ב [10 נקודות]

$$\text{Log-VC} = \left\{ (G=(V,E),U,k) \mid \begin{array}{r} G \text{ גרף לא מכוון, } U \subset V \text{ קבוצת צמתים בגודל } \log(|V|)\text{,} \\ \text{וקיים כיסוי צמתים } C \subseteq U \text{ של } G \text{ בגודל לכל היותר } k \end{array} \right\}$$

<u>הערה</u>: הכוונה היא לכיסוי צמתים רגיל (המכסה את כל הקשתות של G) בגודל לכל היותר k, אך ניתן להשתמש בכיסוי *אך ורק* בצמתים מתוך הקבוצה U.

שאלה 3: [25 נקודות]

נגדיר בעייה דומה לבעיית Set Cover, בה כל הקבוצות הם <u>קטעים</u>:

בעיית Interval Cover:
<u>מופע</u>: n קטעים סגורים $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq [0,1]$ כך ש- $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [0,1]$.
<u>פתרון חוקי</u>: קבוצת אינדקסים $B \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ כך ש- $\bigcup_{i\in B} I_i = [0,1]$.
<u>יש למצוא</u>: פתרון חוקי קטן ביותר.

סעיף א [5 נקודות]
נתון האלגוריתם החמדן הבא:

(1) אתחילו $B = \emptyset$.
(2) כל עוד $\bigcup_{i\in B} I_i \neq [0,1]$ בצעו:

- יהי j אינדקס של קטע <u>ארוך ביותר</u> מבין $I_1, I_2, \ldots, I_n$.
- הוסיפו את j ל-B.
- לכל $1 \leq i \leq n$ עדכנו $I_i \leftarrow I_i \setminus I_j$. (לדוגמה, אם $I_j = [0.3, 0.9]$ ו- $I_i = [0.1, 0.5]$ אז לאחר העדכון נקבל ש- $I_j = \emptyset$ ו- $I_i = [0.1, 0.3]$)

(3) החזירו את B.

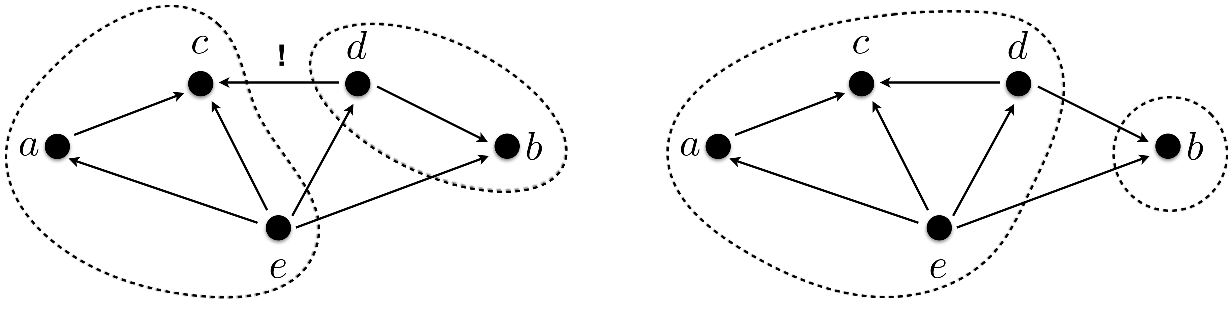
הראו דוגמה בה האלגוריתם לא מוצא פתרון אופטימלי לבעיית Interval Cover.

סעיף ב [20 נקודות]
הראו אלגוריתם חמדן לבעיית Interval Cover. הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן הריצה.

רמז: בכל פתרון חוקי B קיים $i \in B$ כך ש- $0 \in I_i$.
מומלץ להשתמש בסכימה המומלצת להוכחת הנכונות של אלגוריתמים חמדנים.

שאלה 4: [30 נקודות]

<u>הגדרה</u>: בגרף מכוון $G = (V, E)$, עבור קודקודים $a, b \in V$, חלוקה $(S, V \setminus S)$ של הקודקודים V תיקרא *חתך-*(a,b) *מכוון* אם $a \in S$, $b \in V \setminus S$, ואין אף קשת ב-E מקודקוד ב-$V \setminus S$ לקודקוד ב-S (*נגד* כיוון החתך).



<u>דוגמה</u>: החלוקה בצד ימין, $(\{a, c, d, e\}, \{b\})$, מהווה חתך-(a, b) מכוון. החלוקה בצד שמאל, $(\{a, c, e\}, \{b, d\})$, אינה מהווה חתך-(a, b) מכוון, משום שהקשת (d, c) חוצה את החתך בכיוון הלא נכון.

סעיף א [9 נקודות]

הוכיחו שקיים חתך-(a, b) מכוון בגרף מכוון $G = (V, E)$ אם״ם אין אף מסלול מכוון מ-b ל-a.

סעיף ב [6 נקודות]

הציעו אלגוריתם שרץ בזמן $O(|E|)$ ומחזיר חתך-(a, b) מכוון בגרף מכוון $G = (V, E)$, אם קיים.

סעיף ג [15 נקודות]

<u>הגדרה</u>: בבעיית *חתך-*(a,b) *מכוון מינימום* נתון גרף מכוון וממושקל $G = (V, E)$ עם משקלים $w : E \to \mathbb{R}+$ על הקשתות, וקודקודים $a, b \in V$ כך ש-

- קיים חתך-(a, b) מכוון ב-G.
- G לא מכיל קשתות אנטי-מקבילות (אין אף $u, v \in V$ כך ש- $(u, v), (v, u) \in E$),

ויש למצוא חתך-(a, b) מכוון $(S, V \setminus S)$, כך שמשקל החתך, כלומר סכום משקלי הצלעות החוצות אותו, הוא קטן ביותר (בין כל חתכי-(a, b) מכוונים בגרף).

בהינתן גרף G ומשקלים w כנ״ל, בנו גרף מכוון $G' = (V, E')$ ופונקציית קיבול c כך ש- $E' = E \cup E''$ עבור

$$E'' = \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}$$

וקיבולים

$$c(e) := \begin{cases} w(e) & \text{אם } e \in E \\ \infty & \text{אם } e \in E'' \end{cases}$$

הוכיחו כי (S, T) חתך-(a, b) מכוון מינימום עבור (G, w) אם״ם (S, T) חתך מינימום ברשת הזרימה (G', c, a, b).