שאלה 1 [25 נקודות]

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון, $w:E\to\mathbb{R}$ פונקציית משקל על הקשתות, ו-$s\in V$ קודקוד מקור.
הגדרה: נאמר שקשת $(u,v)\in E$ היא קשת טובה אם קיים מסלול קל ביותר מ-s ל-v שהקשת (u,v) היא אחרונה בו.

סעיף א [7 נקודות]
יהי P מסלול מ-s ל-t בגרף. הוכיחו כי P מסלול קל ביותר אם"ם כל קשתות במסלול P טובות.

בסעיפים הבאים נניח כי לא קיימים מעגלים שליליים בגרף.

סעיף ב [4 נקודות]
תארו אלגוריתם אשר מוצא את כל הקשתות הטובות בגרף. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח את זמן ריצת האלגוריתם.

בסעיפים הבאים נתונה $\delta(s,v)$ לכל $v\in V$.
רמז לסעיפים ג'+ד': השתמשו בסעיפים קודמים.

סעיף ג [7 נקודות]
תארו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|E|+|V|)$ אשר בהנתן קשת $e\in E$ וקודקוד יעד $t\in V$ מכריע האם e נמצאת על כל מסלול קל ביותר מ-s ל-t. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח זמן ריצה.

סעיף ד [7 נקודות]
תארו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|E|+|V|)$ אשר בהנתן קשת $e\in E$ וקודקוד יעד $t\in V$ מכריע האם e נמצאת על מסלול קל ביותר כלשהו מ-s ל-t. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לנתח זמן ריצה.

פתרון:

למה (הוכחה בכיתה): תת-מסלול של מסלול קל ביותר הינו מסלול קל ביותר.
סעיף א
נסמן $P=(s=v_0,v_1,\dots,v_k=t)$, וכן $P_i=(v_0,\dots,v_i)$ לכל $0\le i\le k$.
$\Leftarrow$ נתון כי P מסלול קל ביותר מ- s ל-t. נתבונן בקשת (v_i,v_{i+1}) כלשהי ב-P. לפי הלמה, המסלול P_{i+1} הינו מסלול קל ביותר מ-s ל-v_{i+1}. לכן, לפי הגדרה (v_i,v_{i+1}) קשת טובה.
$\Rightarrow$ נתון כי כל קשתות P טובות. נוכיח באינדוקציה על $i=0,\dots,k$ כי $w(P_i)=\delta(s,v_i)$, כלומר P_i מסלול קל ביותר מ-s ל-v_i. עבור $i=k$ נקבל כי P מסלול קל ביותר מ-s ל-t כנדרש.
בסיס: $i=0$. אזי P_0 המסלול הריק מ-s לעצמו. מכיוון שאין מעגל שלילי מ-s לעצמו בגרף, $w(P_0)=0=\delta(s,s)$ כנדרש.
צעד: נניח את נכונות הטענה עבור $i<k$ ונוכיח עבור $i+1$. לפי הנתון (v_i,v_{i+1}) קשת טובה, ולכן קיים מסלול קל ביותר מ-s ל-v_{i+1} כאשר (v_i,v_{i+1}) הקשת האחרונה בו. נסמן ב-P' את הרישא של מסלול זה עד לצומת v_i. מהגדרתו כמסלול קל ביותר מתקיים $\delta(s,v_{i+1})=w(P')+w(v_i,v_{i+1})$. לפי הנחת האינדוקציה P_i מסלול קל ביותר מ-s ל-v_i, ולפי הלמה P' גם הוא מסלול קל ביותר מ-s ל-v_i, ולכן $w(P_i)=w(P')$. סה"כ נקבל:

$$w(P_{i+1})=w(P_i)+w(v_i,v_{i+1})=w(P')+w(v_i,v_{i+1})=\delta(s,v_{i+1})$$

■

<u>סעיף ב</u>

תיאור האלגוריתם

נחשב את $\delta(s,v)$ לכל $v \in V$. לכל קשת $(u,v) \in E$, אם $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$ נסמן את הקשת כקשת טובה.

ניתוח זמן ריצה:

לחישוב $\delta(s,v)$ לכל קודקוד v נריץ את בלמן-פורד. זמן ריצה $O(|V||E|)$.

נעבור על כל קשת ונבדוק אם היא צלע טובה. הבדיקה מתבצעת בזמן קבוע ולכן זמן הריצה הוא $O(|E|)$. סך הכל, זמן ריצת האלגוריתם הוא $O(|V||E|)$.

<u>סעיף ג</u>

תיאור האלגוריתם

1. אם e קשת טובה בצע:
   a. בנה את גרף הקשתות הטובות $G' = (V, E' \backslash \{e\})$ כאשר
   $E' = \{\, (u,v) \in E : \delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)\}$
   b. אם t לא נגיש מ-s ב-G' החזר "כן" (e נמצאת על כל מסלול קל ביותר מ-s ל-t), אחרת החזר "לא".
2. החזר "לא".

זמן ריצה

בדיקת e - $O(1)$. בניית G' וסריקה של הגרף - $O(|E| + |V|)$

בסה"כ: $O(|E| + |V|)$.

<u>סעיף ד</u>

נסמן $e = (u,v)$.

תיאור האלגוריתם

1. אם e קשת טובה בצע:
   a. בנה את גרף הקשתות הטובות $G' = (V, E' \backslash \{e\})$ כאשר
   $E' = \{\, (u,v) \in E : \delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)\}$
   b. אם t נגיש מ-v ב-G' החזר "כן" (e נמצאת על מסלול קל ביותר כלשהו מ-s ל-t), אחרת החזר "לא".
2. החזר "לא".

זמן ריצה

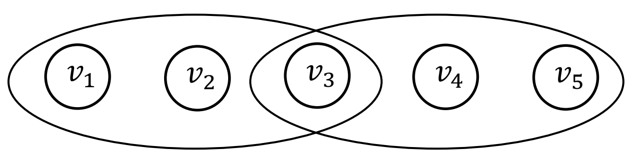
בדיקת e - $O(1)$. בניית G' וסריקה של הגרף - $O(|E| + |V|)$

בסה"כ: $O(|E| + |V|)$.

<u>שאלה 2 [25 נקודות]</u>

הגדרה: היפר-גרף הוא זוג $H = (V,E)$, כך ש- V היא קבוצת קודקודים וכך ש- E היא קבוצת היפר-קשתות, כאשר כל היפר-קשת היא <u>קבוצה של שלושה קודקודים</u>.

דוגמה: $H = (V,E)$ כאשר $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ וכאשר $E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_3, v_4, v_5\}\}$. בציור:



הגדרה: <u>כיסוי בצמתים של היפר-גרף</u> $H = (V,E)$ הוא קבוצת קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל היפר-קשת $\{v_1, v_2, v_3\} \in E$ מתקיים $|\{v_1, v_2, v_3\} \cap C| \geq 2$.

(כלומר קב' קודקודים C היא כיסויי בצמתים אם היא מכילה לפחות 2 קודקודים מכל היפר-קשת).

הראו שהשפה הבאה היא NP-שלמה.

$$\text{HVC} = \left\{ \langle H, k \rangle : \begin{array}{c} \text{הוא היפר גרף שיש לו } H \\ k \text{ כיסויי בצמתים בגודל לכל היותר} \end{array} \right\}.$$

רמז: השתמשו בעובדה כי VC הינה NP-שלמה.

<u>פתרון:</u>

ראשית נראה כי $HVC \in NP$:

אלגוריתם אימות יקבל קבוצת צמתים S ויחזיר "כן" אם גודלה לפחות k וגם לכל קשת e, $|e \cap S| \geq 2$, ואחרת לא.

1. נכונות נובעת באופן מיידי מהגדרת השפה: HVC.
2. בהינתן קלט: $(H, k), S$ לאלגוריתם האימות, האלגוריתם יעבור על כל צלע בגרף ויבדוק כמה קודקודים משותפים יש לצלע עם S. זמן הריצה: $O(|E||S|)$ - פולינומיאלי בגודל הקלט.
3. בהינתן מופע $(H, k) \in HVC$, ישנה קבוצת קודקודים S המהווה כיסוי בצמתים עבור H. כמובן ש $|S| \leq |V|$ ולכן גודל העד פולינומיאלי בגודל הקלט. למעשה, הפולינום $P(x) = x$ מהווה חסם לגודל העד.

כעת נראה ש-HVC היא NP-קשה, ומכך ינבע כי HVC היא NP שלמה. לצורך כך נבחר בשפה VC, שראינו שהיא NP-שלמה. להלן הרדוקציה:

$$f(G, k) = (G', k+1)$$

$$G' = \left(V' = V \cup \{\tilde{v}\}, E' = \left\{\{\tilde{v}, u, v\} : \{u, v\} \in E\right\}\right)$$

נוכיח את נכונות הרדוקציה:

<u>1. אם $(G, k) \in VC$, אז $(G', k+1) \in HVC$:</u>

$(G, k) \in VC$<= קיים כיסוי בצמתים חוקי $C \subseteq V$ ב-G, כך ש-$|C| \leq k$. נבחר ב-$C' \coloneqq C \cup \{\tilde{v}\}$ ככיסוי ב-G'. $|C'| \leq k + 1$ וגם לכל קשת $\{\tilde{v}, u, v\} \in E'$, $\{u, v\} \in E$. לכן, לכל קשת $\{u, v, \tilde{v}\} \in E'$, $|\{u, v\} \cap C| \geq 1$, ומכך ש-$\tilde{v} \in C'$ נסיק ש-$|\{\tilde{v}, u, v\} \cap C'| \geq 2$. לפיכך, $(G', k+1) \in HVC$ כנדרש.

<u>2. אם $(G', k+1) \in HVC$, אז $(G, k) \in VC$:</u>

$(G', k+1) \in HVC$<= קיים כיסוי בצמתים חוקי $C \subseteq V'$ ב-G', כך ש-$|C| \leq k + 1$.

אם $\tilde{v} \notin C$ נבחר $q \in C$ ונגדיר $C' \coloneqq (C \cup \{\tilde{v}\}) \setminus \{q\}$ ואחרת $C' = C$. C' באותו גודל ו $\tilde{v} \in C'$. ראשית נטען כי C' כיסוי בצמתים. הטענה טריוויאלית כאשר $C = C'$, לכן נוכיח עבור המקרה ש $C' \neq C$ ולפיכך $\tilde{v} \in C' \setminus C$.

אכן, בהינתן צלע $\{u, v, \tilde{v}\} \in E'$, לצלע יש לפחות שני קודקודים משותפים עם C. מכיוון ש $\tilde{v} \notin C$, יש בדיוק שני קודקודים משותפים והם: $\{u, v\}$. כעת, הסרנו מ C קודקוד אחד בלבד ולכן, בלי הגבלת הכלליות, $u \neq q$. יוצא שלכל צלע $\{u, v, \tilde{v}\} \in E'$, בלי הגבלת הכלליות, $u, \tilde{v} \in C'$ ולכן C' כיסוי בצמתים.

כעת, מכיוון שלכל צלע $\{u, v, \tilde{v}\} \in E'$, $u \in C'$ או $v \in C'$, יוצא ש $C' \setminus \{\tilde{v}\}$ כיסוי בקודקודים עבור G שגודלו k כנדרש.

בהינתן מופע ל VC, הרדוקציה מוסיפה קודקוד לגרף ומוסיפה קודקוד לכל צלע. לכן, זמן הריצה של הרדוקציה פולינומיאלי בגודל הקלט.

<u>שאלה 3 [20 נקודות]</u>

<u>הגדרה:</u>
תהי $N = (G = (V, E), c, s, t)$ רשת זרימה ו- f זרימה ברשת N. *<u>מסלול-זרימה-f</u>* ברשת זרימה N הינו מסלול ב-G מ-s ל-t בו לכל קשת (u, v) מתקיים $f(u, v) > 0$.

תהי N רשת זרימה ותהי f זרימה חוקית כך ש- $|f| > 0$. הוכיחו כי קיים מסלול-זרימה-f ברשת זרימה N.

הדרכה: מומלץ להשתמש באחד משני הרמזים הבאים (כל אחד מהם מתאים לפתרון אחר)

- חישבו על הזרימה העוברת בחתך (S, T).
- שקלו להוכיח את הטענה הבאה: תהי f זרימה חוקית. יהי P מעגל פשוט ב- G. אם קיים קבוע $a > 0$ כך שלכל $(u, v) \in P$ מתקיים $f(u, v) \geq a$, אזי גם הפונקצייה f' הבאה היא זרימה חוקית:

$$f'(u, v) = \begin{cases} f(u, v) - a & , \quad \text{if } (u, v) \in P \\ f(u, v) + a & , \quad \text{if } (v, u) \in P \\ f(u, v) & , \quad \text{else} \end{cases}.$$

<u>פתרון:</u>

נסמן: $E_{>0} \coloneqq \{\{u, v\} \in E: f(u, v) > 0\}$. נניח בשלילה שלא קיים מסלול-זרימה-f ב-N.
אזי בגרף $G' \coloneqq (V, E_{>0})$ מתקיים ש-t לא ישיג מ-s. נסמן $Q \coloneqq \{v \in V: d_{G'}(v) < \infty\}$ ונביט בחתך $s - t$: $(Q, V \setminus$
Q. נשים לב שעל פי ההנחה בשלילה $t \notin Q$ ולכן זהו אכן חתך. מהבנייה מתקיים: $u,v \in E: u \in Q,\ v \notin Q f u,v \leq 0$, אך
ממשפט, לכל חתך ובפרט לחתך $(Q, V \setminus Q)$ מתקיים: $\sum_{\{u,v\} \in E: u \in Q, v \notin Q} f(u, v) = |f| > 0$, בסתירה.

<u>שאלה 4 [25 נקודות] – שאלת הוכיחו/הפריכו. אין קשר בין סעיפים שונים בשאלה.</u>

סעיף א [6 נקודות]

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר <u>לא מכוון</u>, ותהי $w: E \to \mathbb{R}$ פונקציית משקל כך שאין ב- G מעגלים שליליים. יהי s קודקוד ב- G.

הגדרה: *<u>גרף מסלולים זולים ביותר מ-s של G</u>* הינו עץ לא מכוון PG בו לכל קודקוד $v \in V$ בגרף, המסלול היחיד מ-s ל-v ב-PG הינו מסלול קל ביותר מ-s ל-v ב-G.
הוכיחו או הפריכו: T הוא עפ"מ של G אם"ם T הוא גרף מסלולים זולים ביותר מ-s של G.

סעיף ב [5 נקודות]

הגדרה: $3 - Clique = \{\ G\ :\ $ גרף לא מכוון וקיימת בו קליקה בגודל 3 $G\}$.
הוכיחו או הפריכו: השפה $3 - Clique$ שייכת ל-P.
במידה ובחרתם לתאר אלגוריתם, אין צורך בהוכחת נכונות.

סעיף ג [8 נקודות]

הוכיחו או הפריכו: יהי G גרף מכוון חסר מעגלים שליליים. קיימת ריצה של אלג' Bellman-Ford על G המסתיימת תוך איטרציה אחת.

סעיף ד

יהיו $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ אלגוריתמים אקראיים המחזירים "כן" או "לא".

- נתון כי ל- $\mathcal{A}_1$ יש טעות חד-כיוונית לכל היותר $9/10$. כלומר אם התשובה הנכונה על קלט x היא "כן" אז $\mathcal{A}_1(x)$ מחזיר "כן" תמיד, ואם התשובה הנכונה היא "לא" אזי $\mathcal{A}_1(x)$ מחזיר "כן" בהסתברות לכל היותר $9/10$.
- נתון כי ל- $\mathcal{A}_2$ יש טעות דו-כיוונית לכל היותר $1/10$. כלומר לכל קלט x מתקיים ש $\mathcal{A}_2(x)$ מחזיר תשובה שגוייה בהסתברות לכל היותר $1/10$.

עבור פרמטר t ואלגוריתם $\mathcal{A}_i$ נגדיר אלג' $\mathcal{A}_i^t$:

(1) בהנתן קלט x, הרץ את $\mathcal{A}_i$ t פעמים על x, וקבל תשובות $a_1, a_2, \dots, a_t$.

(2) אם אחת התשובות שהתקבלו היא "לא", אז נחזיר "לא". אחרת נחזיר "כן".

הוכיחו או הפריכו את שתי הטענות הבאות:

סעיף ד-1 [3 נקודות]

קיים קבוע $t > 0$ כך שלכל קלט x מתקיים

$\Pr[\text{טועה } \mathcal{A}_1^t(x)] \leq 1/100$.

סעיף ד-2 [3 נקודות]

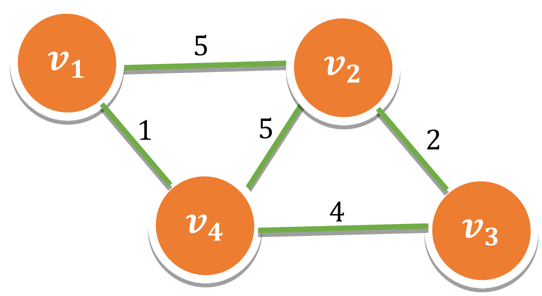
קיים קבוע $t > 0$ כך שלכל קלט x מתקיים

$\Pr[\text{טועה } \mathcal{A}_2^t(x)] \leq 1/100$.

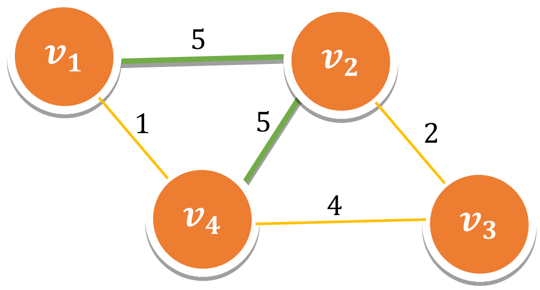
<u>פתרון:</u>

פתרון סעיף א

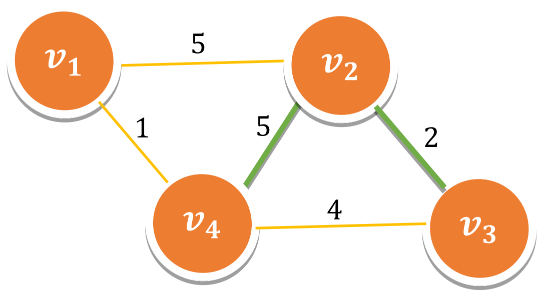
הטענה לא נכונה, נראה דוגמה נגדית. נתבונן בגרף הבא:



עץ פורש מזערי שלו, במשקל 7, יהיה:



וגרף מסלולים זולים ביותר שלו מִ-v_1 יהיה:



נשים לב כי המסלול הקצר ביותר בין v_1 לְ-v_2 הוא הצלע הישירה ביניהם, ומשקלו 5, אבל בעץ הפורש המזערי המסלול היחיד ביניהם במשקל גדול יותר. כמו-כן, המשקל של גרף המסלולים הקצרים ביותר הינו 10, בעוד העץ הפורש המזערי במשקל 7.

פתרון סעיף ב

$3-Clique \in P$.

נתאר אלגוריתם שפותר בעיה זו, ונראה כי זמן ריצתו פולינומיאלי. בהינתן גרף G, נתבונן בכל תתי-הקבוצות שלו בגודל 3. עבור כל אחת, נבדוק כי היא קליקה. כלומר, עבור כל $U \subseteq V$ כך שֶ-$|U| = 3$ נבדוק שלכל $u, v \in U$ מתקיים $(u, v) \in E$. אם מצאנו U שכזו, נחזיר כן. לבסוף, אם לא מצאנו, נחזיר לא.

טענה: $G \in 3-Clique \Leftrightarrow$ האלגוריתם שלנו החזיר כן.

ננתח את זמן ריצת האלגוריתם. בהינתן קבוצה $U \subseteq V$ בגודל 3 אנו מבצעים $O(1)$ בדיקות. עתה נשאל – *כמה קבוצות $U \subseteq V$ בגודל 3 ישנן?* התשובה היא $\binom{|V|}{3}$. נשים לב כי: $\binom{|V|}{3} \in O(|V|^3)$, ולכן זמן הריצה הכולל של האלגוריתם שלנו הינו $O(|V|^3)$, כלומר פולינומיאלי בגודל הקלט. הראנו אלגוריתם פולינומיאלי להכרעת הבעיה $3-Clique$, ולכן $3-Clique \in P$.

פתרון סעיף ג

הטענה נכונה. נסמן: $\tilde{P}(s,v)$: מסלול קצר ביותר כלשהו מבין כל המסלולים הקלים ביותר מִ-s לְ-v (למשל: אם יש שני מסלולים קלים ביותר, האחד עובר דרך שני קדקודים והאחר דרך חמישה, נתיחס לזה העובר דרך השנים), $Q_i = \left\{v \in V \mid \left|\tilde{P}(s,v)\right| = i\right\}$ – קבוצת כל הקדקודים שהמסלול הקל ביותר שבחרנו בין s אליהם הוא בעל i קשתות. נבחין כי:

$$\{s\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i = V$$

סדר בחירה של אלגוריתם בלמן-פורד שייגמר תוך פאזה אחת הינו מעבר על הקשתות בסדר $\{s\} = Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$. כלומר, תחילה נעבור על הקשתות מִ-$\{s\}$ לְ-Q_1, ולאחר מכן לכל $1 \le i < n-1$ נעבור על הקשתות מִ-Q_i לְ-Q_{i+1}.

נראה שבפאזה הראשונה, לאחר שעברנו על $Q_0, \dots, Q_{\{i-1\}}$ נקבל כי $d[v] = \delta(s,v)$ לכל $v \in Q_i$, כאשר $\delta(s,v)$ הוא משקל המסלול הקל ביותר מִ-s לְ-v.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על i.

<u>בסיס</u>: $i = 0$

לא עברנו על אף צלע ולכל קודקוד v, $d[v]$ מכיל את הערך התחילי. $Q_0 = \{s\}$ ו $d[s]$ מאותחל ל 0.
מכיוון שאין מעגלים שליליים, זהו גם ערכו של $d(s,s)$ כנדרש.

<u>הנחה</u>: לכל $0 \le j < i$ ולכל $v \in Q_j$: $d_j[v] = \delta(s,v)$.

<u>הוכחה עבור i</u>:

יהא $v \in Q_i$. נתבונן במסלול $\tilde{P}(s,v) = \{s, u_1, \dots, u_t, v\}$. נשים לב שֶ-$u_t \in Q_{i-1}$, כי המסלול $\{s, u_1, \dots, u_t\}$ (שאורכו $i-1$) הוא בהכרח מסלול קל ביותר מִ-s לְ-u_t, ואחרת הינו מקבלים מסלול קל יותר או באותו משקל אך קצר יותר מִ-s לְ-v. נבחין גם כי $\delta(s,v) = \delta(s,u_t) + w(u_t,v)$. לכן, מהנחת האינדוקציה שלנו, לפני המעבר על $Q_{\{i-1\}}$: $d[u_t] = \delta(s,u_t)$. לכן:

$$\delta(s,v) = \delta(s,u_t) + w(u_t,v) = d[u_t] + w(u_t,v).$$

בזמן המעבר על הצלעות היוצאות מ $Q_{\{i-1\}}$ נעשתה פעולת $relax(u_t,v)$. לפיכך:

$$d[v] \le d[u_t] + w(u_t,v) = \delta(s,v).$$

עם זאת, מכיוון שבכל שלב $d[v] \ge \delta(s,v)$ (הוכח בהרצאות), נקבל שלאחר המעבר על $Q_0, \dots, Q_{\{i-1\}}$, $d[v] = \delta(s,v)$ כנדרש.

סעיף ד

פתרון סעיף ד-1

הטענה נכונה. אם $x \in L$ אז $\Pr\left[\text{טועה } \mathcal{A}_1^t(x)\right] = \Pr\left[\begin{matrix}\text{החזיר בריצה } \mathcal{A}_1 \\ \text{מסוימת תשובה שלילית}\end{matrix}\right]$. אבל כאשר $x \in L$ אז $\mathcal{A}_1$ תמיד יחזיר תשובה חיובית ולכן:

$$\Pr\left[\text{טועה } \mathcal{A}_1^t(x)\right] = \Pr\left[\begin{matrix}\text{החזיר בריצה } \mathcal{A}_1 \\ \text{מסוימת תשובה שלילית}\end{matrix}\right] = 0 \le \frac{1}{100}.$$

כעת, אם $x \notin L$ אז

$$\Pr\left[\text{טועה } \mathcal{A}_1^t(x)\right] = \Pr\left[\begin{matrix}\text{החזיר בכל הריצות } \mathcal{A}_1 \\ \text{תשובה חיובית}\end{matrix}\right] = \left(\Pr\left[\text{החזיר תשובה חיובית } \mathcal{A}_1\right]\right)^t \le \left(\frac{9}{10}\right)^t,$$

הריצות הינן בלתי תלויות ולכן ההסתברות לחיתוך המאורעות הינה כפל ההסתברויות.

קיבלנו כי $\Pr\left[\text{טועה } \mathcal{A}_1^t(x)\right] \le \left(\frac{9}{10}\right)^t$ וכיוון שהביטוי שואף לאפס כש-t שואף לאינסוף קיים t עבורו $\Pr\left[\text{טועה } \mathcal{A}_1^t(x)\right] \le \frac{1}{100}$

פתרון סעיף ד-2

הטענה שגויה. אם $x \in L$ אז נקבל כי:

$$\Pr\left[\mathcal{A}_2^t(x) \text{ טועה}\right] = \Pr\left[\begin{array}{c}\mathcal{A}_2 \text{ החזיר בריצה} \\ \text{מסוימת תשובה שלילית}\end{array}\right] = 1 - \Pr\left[\begin{array}{c}\mathcal{A}_2 \text{ החזיר בכל הריצות} \\ \text{תשובה חיובית}\end{array}\right]$$

$$= 1 - \left(\Pr\left[\mathcal{A}_2 \text{ החזיר תשובה חיובית}\right]\right)^t \geq 1 - \frac{1}{10^t}$$

הריצות של $\mathcal{A}_2$ הינן בלתי תלויות ולכן ההסתברות לחיתוך המאורעות הינה כפל ההסתברויות.

אבל לכל $t \geq 1$, $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{10^t}$. לכן, לכל $t \geq 1$,

$$1 - \frac{1}{10^t} \geq 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} > \frac{1}{100}$$

לכן, עבור $x \in L$, ההסתברות לטעות גדולה מ $\frac{1}{100}$ לכל t ולמעשה, ההסתברות לטעות במקרה הגרוע היא $\frac{9}{10}$ לפחות.