תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

סמסטר ב׳ תשע״ה

בוחן אמצע סמסטר 08.05.2015

ללא חומר עזר.

<u>הנחיות חשובות:</u>

- הבוחן ללא חומר עזר מכל סוג שהוא.
- משך הבוחן שעתיים וחצי.
- **סה״כ הנקודות בבוחן הוא 105.**
- פתרו את הבוחן תחילה במחברת טיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. אין לחרוג מהמקום בדף התשובות.
- **שימו לב: בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד!**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ- 2 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- טענה ללא נימוק לא תתקבל.
- מותר להשתמש במשפטים מהכיתה ומהתרגול, אך יש לציין את הניסוח המדויק של המשפט. ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.
- **אם לא מצוין אחרת, על תיאור האלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו ״לא יודעים״ ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- שימו לב, לא תהיינה הארכות זמן למבחן זה (פרט לסטודנטים עם אישורים).
- המלצה חמה: יש לבדוק את התשובות לפני ההגשה.

בהצלחה!

שאלה 1 (35 נקודות)

יהיו $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, קשיר ו- $w: E \to \mathcal{R}$ פונקציית משקל. **נניח כי אין שתי קשתות באותו המשקל**.

נגדיר עץ פורש קשת-כבדה של G כעץ פורש אשר הקשת הכבדה בו קטנה או שווה במשקלה למשקל הקשת הכבדה של העצים הפורשים האחרים של G.

סעיף א (10 נקודות):

<u>טענה</u>: כל עץ פורש קשת-כבדה של G הינו גם עץ פורש מינימום של G.

הוכיחו או הפריכו את הטענה.

סעיף ב (10 נקודות):

יהא $T = (V, E_T)$ עץ פורש של G. תהא $e = (u, v) \in E_T$ קשת ב-T.

נביט בגרף $H = (V, E_T \setminus \{e\})$. גרף זה מכיל שני רכיבי קשירות זרים (אין צורך להוכיח טענה זו).

נסמן את קבוצות הקודקודים שלהם כ- S ו- $V \setminus S$.

הוכיחו כי בכל עץ פורש T' של G קיימת לפחות קשת אחת $e' = (x, y)$ כך ש- $x \in S$ ו- $y \in V \setminus S$.

סעיף ג (15 נקודות):

הוכיחו כי עץ פורש מינימום של G הוא בהכרח עץ פורש קשת-כבדה של G.

הדרכה: היעזרו בטענה שהוכחה בסעיף ב'.

שאלה 2 (70 נקודות)

בעיית סכום מכפלות גדול ביותר:

<u>מופע</u>: סדרת מספרים רציונאליים חיוביים (לא בהכרח שלמים) $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, כאשר $0 < a_i \leq 2$ לכל $1 \leq i \leq n$. נאמר כי S היא תת סדרה רציפה של A אם $S = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$ עבור $1 \leq i \leq j \leq n$.

<u>פתרון חוקי</u>: חלוקה של A לתתי סדרות רציפות זרות $S_1, \dots, S_k$ (כלומר, כל a_i שייך בדיוק לתת-סדרה רציפה אחת) עבור $1 \leq k \leq n$.

<u>ערך פתרון</u>: $w(S_1, \dots, S_k) = \sum_{i=1}^{k} \prod_{a_j \in S_k} a_j$, כלומר – נכפיל את האיברים בכל אחת מתתי הסדרות הרציפות ונסכם את התוצאות.

<u>יש למצוא:</u> פתרון חוקי בעל ערך מקסימום.

<u>דוגמא</u>:

נסתכל על הסדרה $A = (1, 0.5, 1.2)$.

פתרון חוקי הוא $S_1 = (1, 0.5), S_2 = (1.2)$. ערך פתרון זה הוא $1 \cdot 0.5 + 1.2 = 1.7$. זה אינו פתרון אופטימלי כי ערך הפתרון $S_1 = (1), S_2 = (0.5), S_3 = (1.2)$ הוא $1 + 0.5 + 1.2 = 2.7$.

סעיף א (5 נקודות):

לבעיה הוצע האלגוריתם חמדן העובד לפי שני הכללים הבאים:

1.הגדר כל רצף של מספרים גדולים מ- 1 ב- A כתת סדרה רציפה בפתרון.

2. הגדר כל מספר קטן או שווה ל- 1 ב- A כתת סדרה רציפה באורך 1 בפתרון.

הראו דוגמת קלט עבורה האלגוריתם החמדן נכשל והסבירו בקצרה מדוע הוא נכשל (אין לחרוג מהמקום הניתן בדף התשובות).

בסעיפים הבאים נפתור בעיה זו בעזרת תכנון דינמי.

סעיף ב (15 נקודות):

נסחו תת-בעיה אופיינית ונוסחת מבנה, כולל מקרי בסיס ומיקום תשובה.

סעיף ג (20 נקודות):

הוכיחו את נוסחת המבנה. **חובה** להשתמש בסכמת ההוכחה שנלמדה בכיתה.

סעיף ד (20 נקודות):

נסחו אלגוריתם **איטראטיבי** למציאת **ערך** פתרון אופטימאלי המבוסס על נוסחת המבנה שתיארתם בסעיף הקודם. נתחו את זמן ריצתו. אין צורך בהוכחת נכונות.
על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(n^2)$. אלגוריתם עם זמן ריצה $O(n^3)$ יזכה לניקוד חלקי. אלגוריתם בעל זמן ריצה גדול יותר לא יזכה לניקוד.

סעיף ה (10 נקודות):

בעזרת הערכים שחושבו באלגוריתם האיטראטיבי בסעיף הקודם, תארו אלגוריתם יעיל שקובע כמה פתרונות אופטימליים (פתרונות חוקיים בעלי ערך מקסימלי) קיימים לבעיה. **אין צורך בהוכחת נכונות**. יש לספק ניתוח זמן ריצה.

תכנון אלגוריתמים– 202-1-2041

דפי עזר לבוחן

האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal)

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קשיר עם פונקצית משקל $w:E\to\Re$.

1. אתחל $B\leftarrow\emptyset, C\leftarrow E$,
2. כל עוד $|B|<|V|-1$ בצע:
   2.1. הוצא צלע זולה ביותר מ- C, נקרא לה e
   2.2. אם e אינה יוצרת מעגל עם הצלעות ב- B אז $B\leftarrow B\cup\{e\}$
3. החזר את (V,B).

האלגוריתם של פרים (Prim)

קלט: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קשיר עם פונקצית משקל $w:E\to\Re$.

1. בחר $r\in V$ כלשהו
2. אתחל $B\leftarrow\emptyset, S\leftarrow\{r\}$
3. כל עוד $|B|<|V|-1$ בצע:
   3.1. תהי (u,v) צלע זולה ביותר מבין הצלעות $(u,v)\in E$ כך ש- $u\in S, v\notin S$
   3.2. $B\leftarrow B\cup\{e\}$
   3.3. $S\leftarrow S\cup\{v\}$
4. החזר את (V,B).

משפטים

משפט 1:

יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ולא מכוון. התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. G קשיר וחסר מעגלים,
2. G חסר מעגלים ו- $|E|=|V|-1$,
3. G קשיר ו- $|E|=|V|-1$,
4. ב- G יש מסלול פשוט יחיד בין כל זוג קודקודים.

משפט 2:

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, לא מכוון ופשוט. יהי $T=(V,F)$ עץ פורש של G ו- $e\notin F$. אזי $H=(V,F\cup\{e\})$ מכיל מעגל יחיד, ולכל צלע e' במעגל $T'=(V,F\cup\{e\}\setminus\{e'\})$ הוא עץ פורש של G.