

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

סמסטר ב' תשע"ד

מועד ב – 15.09.2014

ללא חומר עזר

הנחיות חשובות:

- בטופס הבחינה 4 עמודים בנוסף לעמוד זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
- המבחן הינו ללא חומר עזר.
- משך המבחן 3½ שעות.
- סה"כ נקודות 100.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.** מחברת הטיוטה מיועדת לגריסה!
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- המבחן מורכב מ- 4 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס או לניקוד אין בהכרח קשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- מותר להשתמש באלגוריתמים ידועים (כולל מתרגולים) מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה **מעבודות הבית** דורשת הוכחה מלאה.
- **ניתן להשתמש בטענות של סעיפים קודמים אפילו אם לא פתרתם אותם.**
- ניתן להסתמך על טענות ומשפטים מהכיתה ומתרגולים, אך יש לנסח אותם במדויק.
- **אם לא מצוין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא וברור.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתך לפני הגשתה.

בהצלחה!

שאלה 1 [23 נקודות – טענות נכון/לא נכון]

בכל אחד מהסעיפים הבאים מופיעה טענה. קבעו האם הטענה נכונה או לא.
תארו בקצרה את האינטואיציה להוכחת תשובתכם או ספקו דוגמא נגדית מנומקת.
שימו לב: תשובות נכונות ללא נימוק מספק לא יזכו לניקוד.

סעיף א [5 נקודות]

יהא R אלגוריתם הסתברותי פולינומי לבעיה P בעל טעות חד צדדית בהסתברות 0.33 לכל היותר. אזי בהכרח ל- P קיים אלגוריתם הסתברותי פולינומי בעל טעות חד צדדית בהסתברות 0.01 לכל היותר.

סעיף ב [6 נקודות]

תהא N רשת זרימה כך שכל הקיבולים על קשתותיה זוגיים מלבד קשת אחת e שקיבולה $c(e)$ אי זוגי. תהא f זרימה מקסימלית ברשת N . נניח שגודלה $|f|$ הינו אי זוגי, אזי ייתכן כי $f(e) < c(e)$.

סעיף ג [7 נקודות]

תהא N רשת זרימה, תהא f זרימה מקסימלית, יהא W חתך s, t ב- N כך ש:

1. $c(W) = |f|$

2. הקשתות החוצות את W הינן: w_1, w_2, \dots, w_k .

תהא N' רשת זרימה זהה ל- N מלבד פונקציית הקיבול כך ש: $\forall e \in E: c'(e) = c(e) + 1$ אזי גודל הזרימה המקסימלית ב- N' הינו בהכרח $|f| + k$.

סעיף ד [5 נקודות]

יהא G גרף מכוון כך שכל המשקלות על קשתותיו ייחודיות (אין שתי צלעות עם אותו משקל) אזי בהכרח לכל $u, v \in V$ קיים לכל היותר מסלול קל ביותר יחיד.

שאלה 2 [25 נקודות]

נתונה טבלה ריבועית A מגודל $n \times n$ המכילה מספרים טבעיים. אנו מעוניינים למצוא מסלול המתחיל ב- $A(1,1)$ (פינה שמאלית עליונה) ומסתיימת ב- $A(n,n)$ (פינה ימנית תחתונה) כך ש:

חוקיות: כל איבר באמצע המסלול הוא **מתחת או מימין** לאיבר הקודם לו.
משקל של מסלול מוגדר כסכום האיברים במסלול.
אופטימליות: משקל המסלול הוא מינימום מבין משקלי כל המסלולים החוקיים.

דוגמה: המסלול המסומן חוקי (אך לא אופטימלי)
ומשקלו: $2 + 5 + 31 + 9 + 19 + 3 + 75 = 144$

2 →	5 →	31 ↓	5
0	6	9 ↓	2
7	1	19 →	3 ↓
6	14	15	75

משקל מסלול אופטימלי הוא: $2 + 0 + 6 + 9 + 2 + 3 + 75 = 97$

בסעיפים הבאים נשתמש בתכנון דינאמי על מנת למצוא משקל של מסלול אופטימלי. נגדיר $OPT(i,j)$ – ערך מסלול חוקי מינימלי מתחיל ב- $A(i,j)$ ומסתיים ב- $A(n,n)$.

סעיף א [12 נקודות]

בנו נוסחת מבנה עבור OPT והסבירו את נכונותה בקצרה. ציינו אתמ מקרה הבסיס ואת מיקום הפתרון לבעיה המקורית.

סעיף ב [8 נקודות]

תכנונו אלגוריתם **מבוסס תכנון דינאמי** לבעיה. נתחו את זמן הריצה, אין צורך בהוכחת נכונות. זמן הריצה הנדרש – לינארי באורך הקלט

סעיף ג [5 נקודות]

בהינתן תוצאת ההרצה של האלגוריתם בסעיף ב', הציגו אלגוריתם המוצא מסלול אופטימלי [שיחזור פתרון]. נתחו את זמן הריצה, אין צורך בהוכחת נכונות. זמן נדרש – לינארי באורך הפלט (המסלול).

שאלה 3 [22 נקודות – טענות נכון/לא נכון]

בכל אחד מהסעיפים הבאים מופיעה טענה. קבעו האם הטענה נכונה או לא.
במידה וקבעתם שהטענה נכונה, תארו בקצרה את האינטואיציה להוכחתה, במידה וקבעתם שהטענה לא נכונה ספקו דוגמא נגדית מנומקת.
שימו לב: תשובות נכונות ללא נימוק מספק לא יזכו לניקוד.

תזכורת: עבור גרף לא מכוון $G = (V, E)$ קבוצת קודקודים $U \subseteq V$ תיקרא קליקה אם לכל זוג קודקודים $u, v \in U$ קיימת קשת $(u, v) \in E$.

נגדיר את השפה הבאה:

$$\sqrt{\text{Clique}} = \left\{ G, k : \begin{array}{l} G = (V, E) \text{ גרף לא מכוון} \\ k \leq \sqrt{|V|} \\ \text{יש ב } G \text{ קליקה בגודל לפחות } k \end{array} \right\}$$

סעיף א [7 נקודות]

$$\sqrt{\text{Clique}} \in NP$$

סעיף ב [15 נקודות]

נניח כי $P \neq NP$ אזי ניתן להכריע את $\sqrt{\text{Clique}}$ בזמן פולינומי.

בסעיף זה במידה ואתם חושבים שהטענה נכונה עליכם להציג אלגוריתם הכרעה פולינומי, לנתח את זמן ריצתו ולהסביר נכונותו בקצרה.
במידה ואתם חושבים שהטענה לא נכונה, עליכם לתאר פורמלית רדוקציה פולינומית משפה $-NP$ קשה, לנתח זמן ריצתה ולהסביר נכונותה בקצרה.

שאלה 4 [25 נקודות]

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$ המיוצג ע"י רשימת שכנויות ונתונה קבוצת צמתים $U \subseteq V$. רוצים לבדוק האם קיים מסלול מכוון (לאו דווקא פשוט; קרי ייתכן שיעבור בצמתים וקשתות יותר מפעם אחת) שמבקר בכל הצמתים ב U .

סעיף א [13 נקודות]

בהינתן גרף מכוון וחסר מעגלים, $G = (V, E)$ וקבוצת קודקודים, $U \subseteq V$ הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע אם קיים מסלול מכוון המבקר בכל צמתי U .

- עבור ניקוד מלא, יש להציע אלגוריתם עם זמן ריצה לכל היותר $O(|E|)$. אלגוריתם בזמן ריצה $O(|V||E|)$ יגרור הורדה של עד 5 נקודות.
- הוכיחו את נכונות האלגוריתם ונתחו את זמן הריצה. ניתן להניח בחישוב זמן הריצה ש - $O(|V|) \leq O(|E|)$

סעיף ב [12 נקודות]

בהינתן גרף מכוון כלשהו $G = (V, E)$ וקבוצת קודקודים, $U \subseteq V$, הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע אם קיים מסלול מכוון המבקר בכל צמתי U .

- יש להציע פתרון יעיל בזמן ריצה שלא עולה בסדר גודל על זמן הריצה של הפתרון שהצעתם לסעיף א.
- בסעיף זה אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם אך עליכם לספק ניתוח זמן ריצתו.

בהצלחה!