תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

פתרון בוחן אמצע – 12.05.2013

שאלה 1

א'

באלגוריתם prim, האופן בן נבחרת צלע במשקל מינימום החוצה את החתך אינו מפורט. האלגוריתם שהוצג בשאלה מתעדף צלעות במשקל מינימום אחרות על פני e ולכן הוא מקרה פרטי של prim.

ב'

נניח בשלילה שהאלגוריתם מחזיר עץ פורש מינימלי המכיל את הצלע e. נחזור לריצת האלגוריתם ונסתכל על האיטרציה בה נבחרה הצלע e כצלע המתווספת לקבוצת הצלעות B:
מכיוון שנתון שב-G ישנו מעגל C הכולל את הצלע e=(u,v), אזי קיים ב-G מסלול מ-u ל-v שאינו עובר ב-(u,v). נסמנו ב-$P = C\setminus(u,v) = (u = v_0\,, v_1, \dots, v_n = v)$. במסלול P קיימים קודקודים v_i, v_{i+1} כך ש-$v_i \in S$ ו-$v_{i+1} \in V\setminus S$, שכן המסלול מתחיל ב-$u \in S$ ומסתיים ב-$v \in V\setminus S$.
הצלע (v_i, v_{i+1}) חוצה את החתך (S, V\S) ומכיוון שהיא צלע במעגל מהנתון נובע כי $w(e) \geq w((v_i, v_{i+1}))$ ולכן האלגוריתם יבחר בצלע זו ולא ב-e, בסתירה להנחה שיבחר ב-e.

שאלה 2

א'

:→
נניח שורש r שייך ל B. מכיוון שכל מסלול משורש העץ לעלה כולל את השורש נקבל שעבור כל מסלול יש נציג בתוך B ולכן כל איבר נוסף ב B יהפוך אותו לפתרון לא חוקי (שני נציגים לאותו מסלול) ולכן |B|=1 .
:←
נניח |B|=1 ונניח בשלילה שהאיבר ב- B שונה מהשורש. בה"כ איבר זה נמצא בתת העץ $T_{L(r)}$. יהי P מסלול כלשהו מהשורש לעלה כלשהו בתת-העץ $T_{R(r)}$, אבל אז נקבל שאין ל-P נציג ב B. סתירה.

ב'

נסמן ב $OPT(T_v)$ את הציון של תת קבוצה המהווה פתרון חוקי בעל ציון מקסימלי עבור העץ T_v.
נסמן ב-r את שורש העץ המקורי אזי פתרון הכולל לבעיה הינו $OPT(T_r)$.

$$OPT(T_v) = \begin{cases} 0\,, & if\ v\ is\ a\ null \\ g(v)\,, & if\ v\ is\ a\ leaf \\ \max\{\mathrm{g(v)}, OPT\left(T_{R(v)}\right) + OPT\left(T_{L(v)}\right)\}\,, & otherwise \end{cases}$$

ג'

מקרה א
נובע באופן טריוויאלי מהגדרת OPT.

מקרה ב
אם v עלה אזי v השורש של תת העץ T_v ומסעיף א נובע כי $OPT(T_v) = g(v)$.

מקרה ג: נעבוד לפי סכימת חמשת השלבים:

1. ניתוח מקרים:
נסמן ב Sol את קבוצת כל הפתרונות החוקיים עבור תת העץ T_v.
תהי $Sol1$ קבוצת הפתרונות החוקים עבור תת העץ T_v אשר מכילים את שורש תת העץ v.
באופן דומה נסמן ב- $Sol2$ קבוצת הפתרונות החוקים עבור תת העץ T_v אשר לא מכילים את השורש v.
2. תתי הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים: יהי O פתרון חוקי עבור תת העץ T_v. אם $v \in O$ אז $O \in Sol1$ אחרת $v \notin O$ ולכן $O \in Sol2$ וסה"כ קיבלנו ש $Sol = Sol1 \cup Sol2$.
3. מסקנה לצורת נוסחת הרקורסיה: $OPT(T_v) = \max\left(O^*(Sol1), O^*(Sol2)\right)$, כאשר $O^*(Soli)$ הינו ציון פתרון אופטימאלי בקבוצה $Soli$ $i = 1,2$.
4. ניתוח האופטימום של כל קבוצה:
צריך להוכיח כי:
$\boldsymbol{O^*(Sol1) = g(v)}$ - נובע ישירות מסעיף א של השאלה.

וכן כי:

כיוון $\geq$:
יהיו Bl ו- Br פתרונות אופטימליים עבור תת העץ המושרש בבנו השמאלי והימני של קודקוד v בהתאמה. נסתכל על איחוד הקבוצות הנ"ל $B = Bl \cup Br$.
נראה כי B פתרון חוקי עבור תת העץ המושרש בקודקוד v, שאינו מכיל את v:
יהי P מסלול כלשהו בעץ T_v. בלי הגבלת הכלליות המסלול נגמר בעלה בתת העץ השמאלי אזי מתכונות עץ בינארי כל המסלול עובר בתת העץ השמאלי, ולכן מהגדרת Bl ומכך ש P מסלול בתת עץ השמאלי אזי יש לו נציג יחיד בקבוצה Bl. כמו כן המסלול P לא מכיל קדקודים מתת העץ הימני (שוב מתכונות העץ הבינארי) ולכן יש לו אפס נציגים בקבוצה Br (שהיא תת קבוצה של קודקודי תת העץ הימיני). סהכ קיבלו שלמסלול הנ"ל יש נציג יחיד ב B.
הראנו כי B פתרון חוקי עבור תת העץ T_v שלא מכיל את השורש ולכן שייך לקבוצה $Sol2$.
בפרט, ציונו קטן מציון של פתרון אופטימאלי בקבוצה זו. קיבלנו כי:
$O^*(Sol2) \geq g(B) = g(Bl) + g(Br) = OPT\left(T_{L(v)}\right) + OPT\left(T_{R(v)}\right)$.

כיוון $\leq$:
יהא $B \in Sol2$ פתרון אופטימלי עבור תת העץ T_v. *מבחירת* B נובע כי B אינו מכיל את v.
נחלק את B לשתי קבוצות: Bl – קבוצה זו מכילה את כל אברי B השייכים לתת עץ המושרש בבנו השמאלי של v ו-Br – קבוצה המכילה את כל אברי B השייכים לתת העץ המושרש בבנו הימני של v.
ממבנה העץ נובע כי הקבוצות הללו זרות.

נראה כי *Br* הינו פתרון חוקי עבור תת העץ המושרש בבנו הימני של *v*: יהי *P* מסלול מהשורש לעלה כלשהו בתת העץ הימני $T_{L(v)}$. על פי תוכנות עץ בינארי כל קודקודי המסלול (חוץ מהשורש *v*) שייכים לתת העץ הימני. מכיוון ש *P* מסלול מהשורש *v* לעלה בתת העץ המושרש בבנו הימני של *v* אזי חייב להיות לו נציג יחיד ב *B*. מכיוון שהשורש אינו שייך ל-*B* אזי נציג זה משתייך לקבוצה *Br* .

כיוון ש- *Br* הינו פתרון חוקי עבור תת העץ המושרש בבנו הימני של *v* ציונו קטן מציון של פתרון אופטימאלי עבור תת העץ המושרש בבנו הימני של *v*. לכן $g(Br) \le OPT\left(T_{R(v)}\right)$.

באופן דומה ניתן להראות כי Bl הינו פתרון חוקי עבור תת העץ המושרש בבנו השמאלי של *v* ולכן ציונו קטן מציון של פתרון אופטימאלי עבור תת העץ המושרש בבנו השמאלי של *v*.

לכן $g(Bl) \le OPT\left(T_{L(v)}\right)$.

קיבלנו כי: $O^*(Sol2) = g(B) = g(Bl) + g(Br) \le OPT\left(T_{L(v)}\right) + OPT\left(T_{R(v)}\right)$.

משני אי השוויונות קיבלנו כי $OPT\left(T_{L(v)}\right) + OPT\left(T_{R(v)}\right) = O^*(Sol2)$.

ד'

נאתחל מערך M בגודל |V|=n תאים לערכים 0.

נפעיל סריקת BFS על הגרף משורש העץ, r. נסמן ב-$v_1, \dots, v_n$ את הקודקודים ממוינים לפי מרחק מהשורש כפי שהתגלה בסריקה בסדר עולה, כאשר $r = v_1$. נוסיף לקודקוד v_i מצביע לתא M[i] במערך.

```
For i=n down to 1:
        If Vi is a leaf:
                M[i] = g(v)
        Else:
                M[i] = max {g(v)  , OPT(L(v)) + OPT(R(v))}
Return M[1]
```

<u>ניתוח זמן הריצה:</u>

אתחול המערך = O(|V|)

ביצוע BFS= O(|V| + |E|) אך מכיוון שהקלט הינו עץ, O(|E|) = O(|V|) ולכן עלותו O(|V|).

ישנן |V| איטרציות. בכל איטרציה ניגשים לכל היותר ל-2 תאים מהמערך M אשר כבר חושבו לפני כן (בניו של קודקוד רחוקים יותר מהשורש מאשר הקודקוד עצמו) ואנו עוברים על הקודקודים הממוינים מהסוף להתחלה.

בסה"כ: O(|V|).

ה'

נגדיר את OPT(v,k) להיות ציון פתרון אופטימלי בגודל k עבור תת-העץ המושרש בקודקוד v.

נוסחאת המבנה הינה:

$$OPT(v,k) = \begin{cases} -\infty, & if\ (k=0)\ or\ (v\ is\ a\ leaf\ and\ k>1) \\ w(v), & if\ k=1 \\ \max_{1 \le i<k}\{OPT(L(v),i) + OPT(R(v),k-i)\}, & otherwise \end{cases}$$

כאשר אנו מעוניינים בחישוב הערך OPT(r,k)

<u>מקרה א':</u>

אם k=0, כלומר לא נותרו בחירות פוטנציאליות, אך בכל זאת עלינו לכסות מסלולים מתת-העץ המושרש ב-v – ברור שהפתרון אינו חוקי ולכן מחזיר מינוס אינסוף. מנגד, אם הגענו לעלה ובידינו יותר מדי בחירות פוטנציאליות (k>1), ברור שנשאר עם בחירות שלא נוצלו ולכן שוב נקבל פתרון שאינו חוקי.

<u>מקרה ב':</u>

אם k=1, כפי שראינו בסעיף א',הפתרון מכיל את שורש העץ בלבד.

<u>מקרה ג':</u>

בכל מקרה אחר, נרצה לחלק את הבחירות הפוטנציאליות שלנו בכל צורה אפשרית בין תת-העץ השמאלי והימני ולבסוף לבחור את החלוקה הטובה ביותר.