

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041 בוחר אמצע – 12.05.2013

ללא חומר עזר

הנחיות חשובות:

- הבוחן הינו ללא חומר עזר.
- משך הבוחן 1.5 שעות.
- סה"כ נקודות 100.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת הטיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ- 2 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס או לניקוד אין בהכרח קשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- **מותר להשתמש בסעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.**
- כל שימוש בתוצאה מעבודות הבית דורשת הוכחה מלאה.
- בתוצאות מהרצאות והתרגולים ניתן להשתמש ללא הוכחה אך במידה והינכם מסתמכים על טענות ומשפטים מהכיתה נסחו אותם במדויק.
- **אם לא מצויין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא.
- מומלץ מאוד לבדוק את עבודתך לפני הגשתה.

בהצלחה!

שאלה 1 (35 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר ו- $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ פונק' משקל על צלעות הגרף. תהי $e \in E$.

נתון האלגוריתם הבא:

אלגוריתם פרים-שונא-צלע- e

קלט: $\langle G = (V, E), w, e \rangle$

1. בחר $r \in V$ כלשהו
2. אתחל $S \leftarrow \{r\}, B \leftarrow \emptyset$
3. כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
 - 3.1. תהי (u, v) צלע זולה ביותר מבין הקשות $(u, v) \in E$ כך ש- $u \in S, v \notin S$.
 - אם $(u, v) \neq e$, בצע $S \leftarrow S \cup \{v\}, B \leftarrow B \cup \{(u, v)\}$
 - אם $(u, v) = e$, בדוק האם קיימת צלע אחרת $e' = (u', v')$ זולה ביותר מבין הצלעות $(u', v') \in E$ המקיימות $u' \in S, v' \notin S$ (כך ש $w(e') = w(e)$).
 - במידה וקיימת צלע כזו, בצע
 - 3.1.1 $B \leftarrow B \cup \{e\}$
 - 3.1.2 $S \leftarrow S \cup \{v\}$
 - אחרת, בצע:
 - 3.1.3 $B \leftarrow B \cup \{e\}$
 - 3.1.4 $S \leftarrow S \cup \{v\}$
4. החזר את (V, B)

הוכיחו את הטענה הבאה:

נתון כי בגרף G הצלע e סוגרת מעגל C עם צלעות $e' \in E$ אשר משקלן לא עולה על משקלה של e , כלומר קיים מעגל C המכיל את e המורכב כולו מצלעות e' המקיימות $w(e') \leq w(e)$. אזי

סעיף א (10 נקודות)

האלגוריתם פרים-שונא-צלע- e יבנה MST של G .

סעיף ב (25 נקודות)

האלגוריתם פרים-שונא-צלע- e יבנה עץ פורש של G אשר לא מכיל את e .

שאלה 2 (65 נקודות)

שאלה זו תעסוק בבעיה הבאה:

מופיע: עץ בינארי מלא $T = (V, E)$ וקודקוד השורש $r \in V$. לכל קודקוד $v \in V$ מוצמד מספר שלם לא שלילי (ציון) $g(v)$.

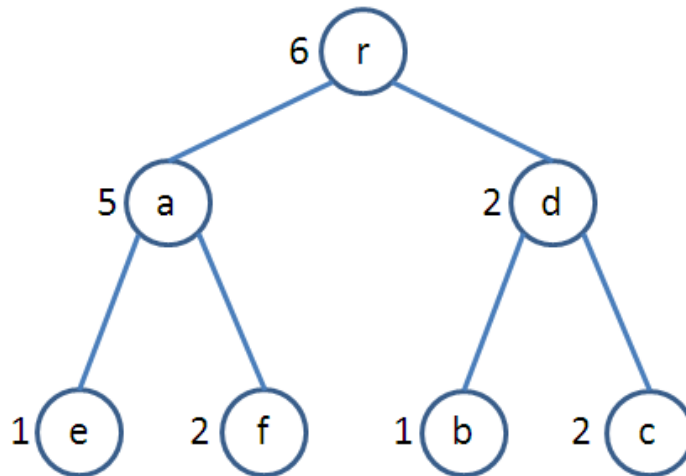
פתרון חוקי: תת קבוצה $B \subseteq V$ כך שלכל מסלול משורש העץ r לעלה כלשהו יש בדיוק נציג אחד ב- B .
באופן שקול: לכל מסלול משורש העץ r לעלה כלשהו יש לפחות נציג אחד ב- B וגם לכל קודקוד ב- B אין אף צאצא (ישיר או עקיף) או אב קדמון השייך גם כן ל- B .

נגדיר ציון של תת קבוצה $B \subseteq V$: $g(B) = \sum_{v \in B} g(v)$.

יש למצוא: ציון של תת קבוצה $B \subseteq V$ המהווה פתרון חוקי בעל ציון מקסימום ב- T .

דוגמא

עבור העץ הבא:



- פתרונות חוקיים הינם: $\{d, e, f\}, \{r\}$.
- פתרון אופטימאלי: $\{a, b, c\}$.

סעיף א (6 נקודות)

יהא B פתרון חוקי עבור המופע לבעיה. הוכיחו את הטענה הבאה עבור שורש העץ $r \in V$:
 $r \in B \Leftrightarrow |B| = 1$

סעיף ב (14 נקודות)

- (1) נסחו תת-בעיה אופיינית (כלומר הגדירו $(OPT(\dots))$).
- (2) הגדירו את נוסחת המבנה לחישוב הערך OPT שהגדרתם כולל מקרי בסיס, אם ישנם.
- (3) ציינו מהו הפתרון הכולל לבעיה המקורית.

מומלץ להיעזר בסימונים המקובלים הבאים:

T_v - תת העץ המורש בקודקוד v .

$L(v)$ - בנו השמאלי של קודקוד v .

$R(v)$ - בנו הימני של קודקוד v .

סעיף ג (20 נקודות)

הוכיחו את נוסחת המבנה על פי הסכימה שנלמדה בכיתה.

סעיף ד (15 נקודות)

נסחו אלגוריתם איטראטיבי הפועל ב $O(|V| + |E|)$ הפותר את הבעיה. אין צורך בהוכחת נכונות. יש לספק ניתוח זמן ריצה.

סעיף ה (10 נקודות)

קעת נרחיב את הבעיה כך שבנוסף לקלט המקורי מקבלים מספר $k \in \mathbb{N}$ וכעת יש למצוא ציון של תת קבוצה המהווה פתרון חוקי בעל ציון מקסימום ב- T מבין הפתרונות החוקיים בגודל k .

דוגמא המתייחסת לעץ הנתון בעמוד הקודם:

פתרונות אופטימאליים:

עבור $k=1$: $\{r\}$

עבור $k=2$: $\{a, d\}$

עבור $k=3$: $\{a, b, c\}$

- (1) נסחו תת-בעיה אופיינית (כלומר הגדירו $(OPT(\dots))$).
- (2) הגדירו את נוסחת המבנה לחישוב הערך OPT שהגדרתם כולל מקרי בסיס, אם ישנם.
- (3) ציינו מהו הפתרון הכולל לבעיה המקורית.
- (4) הסבירו (לא פורמאלית) בקצרה את ההיגיון מאחורי הנוסחה שהצעתם (יש להתייחס לכל המקרים בנוסחה).

בהצלחה!!!