מספר נבחן

____

שאלה 1 - סעיף א' (15 נקודות):

הרעיון – נפצל את הקדקוד הדומינאנטי לשני קדקודים עם צלע ביניהם.

נגדיר את הרדוקציה הבאה:

תרגום הקלט: נגדיר את $G' = (V', E')$ כך ש:

$$V' = \{V \backslash d \cup \{d_1, d_2\}\}$$

$$E' = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$E_1 = \{(u', v'): (u, v) \in E \ and \ u, v \neq d\}$$

$$E_2 = \{(u', d_1): (u, d) \in E\ \} \cup \{(d_2, v'): , (d, v) \in E\ \}$$

$$E_3 = (d_1, d_2)$$

תרגום הפלט: נחליף במסלול המתקבל מהפעלת הקופסה השחורה על $G' = (V', E')$ את הקדקודים (d_1, d_2) ב- d.

הוכחה:

טענת עזר: קיים ב-G מסלול בין s ל- t דרך d באורך l אמ"מ קיים ב-G' מסלול בין s' ל- t' דרך קשת (d_1, d_2) באורך $l + 1$.

הוכחה: קיים מסלול p ב-G העובר דרך d באורך l $\leftrightarrow$ $p = (s, u_1 \dots, u_i, d, u_{i+1}, \dots, t)$ (מהבנייה) $p' = (s, u_1 \dots, u_i, d_1, d_2, u_{i+1}, \dots, t)$ $\leftrightarrow$ מסלול p' ב-G' העובר דרך (d_1, d_2) באורך $l + 1$

טענה ראשית: יהי l אורך המסלול המינימאלי ב-G העובר דרך d. מטענת העזר נובע כי קיים מסלול p' ב-G' באורך $l + 1$. נניח בשלילה כי קיים מסלול p^* ב-G' שאורכו $< k + 1$ $l + 1$. כל מסלול חוקי ב-G' עובר דרך (d_1, d_2) (מבנייה). לכן לפי טענת העזר יש מסלול באורך $k < l$ ב-G ולכן סתירה.

אם אין מסלול ב-G בין s ל- t העובר דרך d אז גם אין מסלול ב-G' בין s ל- t.

זמן ריצה – מעבר על כול הקדקודים והקשתות פעם אחת.

-

____

<u>***שאלה 1*** **- סעיף ב'** (10 נקודות):</u>

הרעיון – נוסיף קדקוד באמצע הקשת הדומיננטית.

נסמן את הצלע הדומיננטית $e=(u,v)$, נגדיר את הרדוקציה הבאה:

<u>תרגום הקלט:</u> נגדיר את $G'=(V',E')$ כך ש:

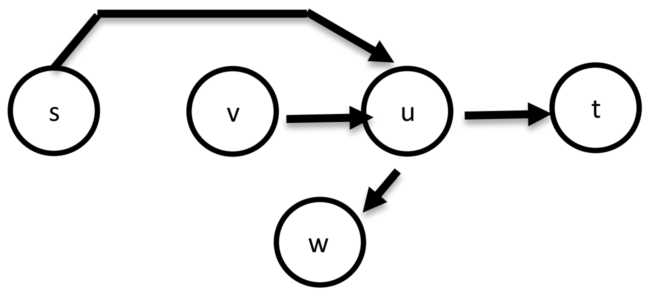
$$V'=\{V\cup\{d\}\}$$

$$E'=E\cup\{(u,d),(d,v)\}$$

נריץ את הקופסא השחורה עם קדקוד d.

<u>תרגום הפלט:</u> נוריד מהמסלול המתקבל מהפעלת הקופסה השחורה על $G'=(V',E')$ את קדקוד d.

שימו לב – התשובה נכווץ את הצלע לקדקוד אינה נכונה. ראו דוגמא נגדית



מספר נבחן

____

שאלה 2 - סעיף א' (3 נקודות):

שאלה 2 - סעיף ב' (17 נקודות):

סעיף ב'

נבחר את e <u>קלה</u> ביותר כך ש- $e \in (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1)$ ונניח בה"כ כי $e \in T_1$.

לפי משפט 1 ב- $(V, E_2 \cup \{e\})$ נוצר מעגל. על מעגל זה קיימת קשת e' כך ש- $e' \notin E_1$ (אחרת יש מעגל ב - T_1). היות ש- e היא קלה מבין כל הקשתות השונות, $w(e') \geq w(e)$.

נניח בשלילה כי $w(e') > w(e)$. נגדיר $T^* = (V, (E_2 \cup \{e\} \backslash \{e'\}))$. לפי משפט 2, T^* עץ פורש.

נחשב את משקלו: $w(T^*) = w(E_2) + w(e) - w(e') < w(T_2)$:

סתירה למינימאליות של T_2 ולכן $w(e') = w(e)$.

הראנו כי $w(e') = w(e)$ ב- $(V, E_2 \cup e)$ ולכן בפרט קיים מעגל בו $w(e') = w(e)$ בגרף האיחוד.

סעיף ב' *the short version*

בה"כ, נבחר את e <u>כבדה</u> ביותר כך ש- $e \in (E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1)$ לפי משפט 1 ב- $(V, E_2 \cup \{e\})$ נוצר מעגל. על מעגל זה קיימת קשת e' כך ש- $e' \notin E_1$ (אחרת יש מעגל ב - T_1), ולפי בחירת e $w(e') \leq w(e)$. אם בשלילה e קשת כבדה ממש על המעגל הנוצר, כלומר $w(e') < w(e)$ לכל e' כנ"ל, אז לפי משפט 3 אין עפ"מ המכיל אותה. לכן קיימת קשת על המעגל הנוצר שמשקלה זהה למשקל e.

the shortest version

בגרף האיחוד קיים מעגל C. נניח בשלילה כי כל הצלעות במעגל בעלות משקל שונה. תהי $e \in C$ כבדה ממש. בה"כ, $e \in T_1$ אזי T_1 אינו עפ"מ ממשפט 3. בסתירה להנחה כי T_1 עפ"מ של G.

מספר נבחן

____

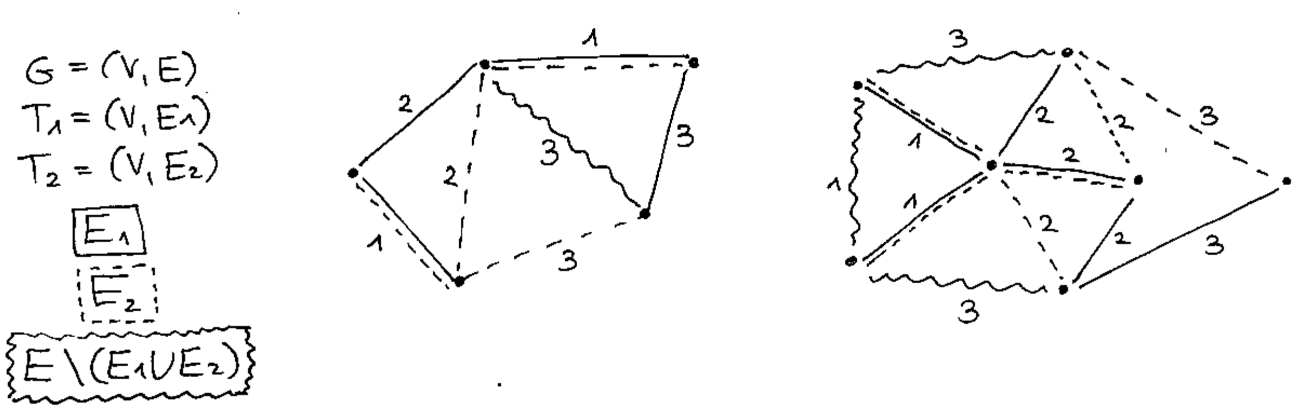
בוחן 2011 שאלה 2:

טעויות נפוצות / שימוש בטענות לא נכונות מן הסוג הבא

(מומלץ לכל סטודנט לעבור על כולן ולבדוק שהוא מבין איפה הבעיה בכל אחת מהן – כדי לא לבצע אותן שוב/בעתיד)

1. "נתבונן בריצת קרוסקל (או פרים) שיצרו את העצים T_1, T_2..."
2. נניח כי העצים T_1, T_2 שונים בצלע אחת, ונוכיח כי הקשתות המבדילות בניהם באותו המשקל.
3. שימוש לא נכון במונח ב.ה.כ. (בלי הגבלת הכלליות)
4. הוספת צלע $e \in E_2\setminus E_1$ לגרף T_1. אז נוצר מעגל יחיד C, עד כאן נכון. נתבונן בקשת $e' \in C$ כך ש- $e' \neq e$. אם נניח בשלילה כי בכל מעגל בגרף האיחוד משקלות הצלעות שונים, אזי ישנם שני מקרים:
   - $w(e') > w(e)$ אזי הגרף $T_1' = (V, E_1\setminus\{e'\} \cup \{e\})$ הינו עץ פורש במשקל קטן מ- T_1. נכון.
   - לגבי המקרה השני, היו שתי טעויות:
     1. הניחו ב.ה.כ $w(e') > w(e)$ ולא טופל המקרה השני.
     2. הניחו כי אם $w(e') < w(e)$ אזי הגרף $T_2' = (V, E_2\setminus\{e\} \cup \{e'\})$ הינו עץ פורש במשקל קטן מ- T_1.
5. שימוש/הבנה לא נכון של משפט 5 מדפי העזר: "צלע קלה ממש במעגל תופיע בכל עפ"מ".
6. לכל $e_1 \in E_1\setminus E_2$ ולכל $e_1 \in E_1\setminus E_2$ בהכרח מתקיים $w(e_1) = w(e_2)$.
7. כל $e_1 \in E_1\setminus E_2$ וכל $e_2 \in E_2\setminus E_1$ בהכרח באותו מעגל בגרף האיחוד.
8. לכל $e_1 \in E_1\setminus E_2$ ו- $e_2 \in E_2\setminus E_1$ באותו מעגל בגרף האיחוד, חולקות קודקוד משותף.
9. כל צלע $e_1 \in E_1\setminus E_2$ סוגרת מעגל יחיד בגרף האיחוד.
10. בכל מעגל בגרף האיחוד בדיוק צלע אחת $e_1 \in E_1\setminus E_2$ ובדיוק צלע אחת $e_1 \in E_1\setminus E_2$ (כל השאר משותפות)
11. נתבונן בצלע ה"סוגרת" מעגל בגרף האיחוד.
12. תיאור הניתן ב"נפנוף ידיים" באשר לנכונות הטענה או הסבר אינטואיטיבי.
13. נוריד מגרף האיחוד את כל המעגלים ע"י הסרת הצלעות הכבדות ביותר בכל מעגל, נקבל עפ"מ יחיד ולכן ל- G יש עפ"מ יחיד בסתירה לנתון.
14. חוסר דיוקים רבים באשר לאיזו צלע בוחרים, המעגל בו היא נמצאת (אם בכלל).
15. נכתבו טענות חזקות הדורשות הוכחה.

דוגמאות גרפיות המפריכות חלק מהטענות, (חלקן לא מופיעות ברשימה):



שאלה 3 - סעיף א' (5 נקודות):

שאלה 3 - סעיף ב' (15 נקודות):

לכל אינדקס j, $j \in \{2,3,\dots,m\}$ תהי $A(j)$ קבוצת האינדקסים i כך ש $2 \le i < j$ ו- $q_j - q_i \le M$.

דהיינו אילו הם אינדקסים i כך ש- q_i יכול לבוא בסדרה S לפני q_j בצמוד ל- q_j.

$$Opt(0) = 0$$

$$Opt(1) = w_1$$

$$(j \ge 2)\ Opt(j) = w_j + min_{i \in A(j)}\big(Opt(i)\big)$$

כמו כן יש לבדוק מראש שאכן יש פתרון, דהיינו שלכל $j \in \{1,2,\dots,m\}$, $q_j - q_{j-1} \le M$

אם התנאי הזה לא מתקיים אזי אין פתרון. הזמן הנדרש לכך הוא ליניארי ב- m.

בזמן $O(m\ min\{m, M\})$ נוכל גם לחשב את $A(j)$ לכל j.

נגדיר גם את $a(j)$ להיות האינדקס הקטן ביותר בתוך $A(j)$ וגם הוא יחושב כאן.

שאלה3 - סעיף ג' (20 נקודות):

נגדיר את S_j להיות הבעיה שבשאלה אך עם קלט $(\{q_1, \ldots, q_j\}, M)$
חלוקה לקבוצות: $i \in A(j)$ תהי Q_i קבוצת הפתרונות לבעיית S_j כך ש- q_i הוא האיבר האחרון בפתרון פרט ל- q_j.
אזי אוסף הפתרונות ל-S_j שווה ל $\cup_{i\in A(j)} Q_i$. זאת כי בכל פתרון ל- S_j יש איבר לפני האחרון כלשהוא. נסמן את האינדקס שלו ב- i, $1 \le i \le j$ אזי הפתרון הוא ב- Q_i. זה מוכיח כיסוי.
טענה: משקל הפתרון האופטימאלי ב- Q_i הוא $Opt(i) + w_j$.
הוכחה: $(\le)$ יהי $\widehat{Opt}(i)$ פתרון אופטימלי כלשהוא ל- S_i. אזי $\widehat{Opt}(i) + \{q_j\}$ הוא פתרון ב- Q_i שמשקלו $Opt(i) + w_j$. לכן משקל הפתרון האופטימאלי ב- Q_i הוא לפחות $Opt(i) + w_j$.
$(\ge)$ יהי O פתרון כלשהו ב- Q_i. אזי $q_i, q_j \in O$ ולא קיים אינדקס t, $i < t < j$, עם $q_t \in O$. לכן $B = O \setminus \{q_j\}$ הוא פתרון ל- S_i. לכן המשקל של B, $w(B)$, הוא $w(B) \ge Opt(i)$ ולכן $w(B) - w_j \ge Opt(i)$ ולכן $w(B) \ge Opt(i) - w_j$.
זה מוכיח את ההתאמה בין המקרים $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j$ לבין הביטויים המופיעים בנוסחא בסעיף ב'.

שאלה 3 - סעיף ד' (10 נקודות):

אלגוריתם איטראטיבי לחישוב המערך $M[1 \ldots m]$:
אתחול: $M[1] = w_1$
צעד: לכל $j = 2$ עד m בצע: $M[j] = w_j + min_{i\in A(j)}\{M[i]\}$

כל חישוב כזה דורש $O(\min\{m, M\})$ זמן. סה"כ לכל m הכניסות במערך דורש $O(m \min\{m, M\})$ זמן.

שאלה 3 - סעיף ה' (5 נקודות):

בודקים האם $M[m-1] + w_m - M[m]$.
אם כן אז נחזיר כן, אחרת נחזיר לא.

בהצלחה!