תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

סמסטר ב' תש''ע

בוחן אמצע סמסטר 30.4.2010

ללא חומר עזר

<u>הנחיות חשובות:</u>

- הבוחן ללא חומר עזר מכל סוג שהוא.
- משך הבוחן שעתיים וחצי.
- פתרו את הבוחן תחילה במחברת טיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **שימו לב: בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד!**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ-3 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- מותר להשתמש במשפטים מהכיתה ומהתרגול, אך יש לציין את הניסוח המדויק של המשפט. ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.
- **אם לא מצוין אחרת, על תאור האלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- שימו לב, לא תהיינה הארכות זמן למבחן זה (פרט לסטודנטים עם אישורים).

בהצלחה!

שאלה 1 (15 נקודות)

ניזכר בבעיית הפעילויות הממושקלת שהוגדרה בהרצאות:

<u>קלט</u>: קבוצת פעילויות $A=\{1,...,n\}$ כאשר לכל פעילות נתונים זמן התחלה s_i, זמן סיום f_i ומשקל w_i.

<u>פתרון חוקי</u>: קבוצת פעילויות זרות.

<u>יש למצוא</u>: פתרון חוקי עם משקל מקסימום.

נתון קלט לבעיה ובו משקל כל פעילות גדול ממש מ-Δ. נתבונן באלגוריתם הבא:

1. הורד Δ ממשקל כל פעילות.
2. פתור את הבעיה ע"י אלגוריתם שתואר בכיתה (עם המשקלים החדשים).
3. החזר את רשימת הפעילויות שהאלגוריתם החזיר.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

האלגוריתם מחזיר פיתרון חוקי עם משקל מקסימום לפי המשקלים המקוריים.

שאלה 2 (55 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף **מכוון** עם פונקצית משקל $w:E\to\Re$ (יתכנו משקלים שליליים) **חסר מעגלים שליליים**. יהי $s\in V$. עבור $v\in V$ ומספר שלם $0\le i\le|V|-1$ נגדיר $\mathrm{OPT}(v,i)$ להיות **משקל מסלול קל ביותר** מ s ל v **שאורכו בדיוק** i אם קיים (כאשר אורך של מסלול הינו **מספר הצלעות** במסלול); אחרת $\mathrm{OPT}(v,i)=\infty$. כמו כן, נגדיר $\mathrm{OPT}(v)$ להיות משקל מסלול קל ביותר מ s ל v.

סעיף א (10 נקודות)

נסחו נוסחת מבנה (נוסחת נסיגה) ותנאי בסיס עבור $\mathrm{OPT}(v,i)$.

סעיף ב (15 נקודות)

הוכיחו את הנוסחה שהגדרתם בסעיף א'. **חובה** להשתמש במסגרת ההוכחה שהוצגה בכיתה. אין צורך להוכיח את מקרי הבסיס.

סעיף ג (8 נקודות)

בטאו את $\mathrm{OPT}(v)$ בעזרת $\mathrm{OPT}(v,i)$. הסבירו תשובתכם.

סעיף ד (12 נקודות)

נסחו אלגוריתם איטרטיבי בסיבוכיות (זמן ריצה) $O(|V|^2+|V|\cdot|E|)$ שעבור קלט G, w ו- s (כפי שפורט לעיל) מחזיר מערך D בגודל $|V|\times|V|$ כך ש $D(v,i)=\mathrm{OPT}(v,i)$ לכל $v\in V$ ולכל $0\le i\le|V|-1$. כמו כן, על האלגוריתם שלכם להחזיר מערך d בגודל $|V|$ כך ש $d(v)=\mathrm{OPT}(v)$ לכל $v\in V$. נתחו את זמן ריצת האלגוריתם. אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם.

ניקוד חלקי יינתן על אלגוריתם בסיבוכיות $O(|V|^3)$.

סעיף ה (10 נקודות)

הציעו אלגוריתם בסיבוכיות $O(1)$ שבהינתן קלט G, w, s (כפי שפורט לעיל), מערך ה- $d(v)$ (כפי שחושב בסעיף ד') וצלע $(u,v)\in E$, מחזיר האם **קיים** מסלול קל ביותר מ s ל-v המכיל את הצלע (u,v).

אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם או לנתח את זמן ריצתו.

שאלה 3 (30 נקודות)

סעיף א (20 נקודות)

יהי $G=(V,E)$ גרף **לא מכוון** קשיר עם פונקצית משקל $w:E\rightarrow\Re$, v קודקוד בגרף ו- e צלע קלה ביותר מבין הצלעות הנוגעות ב- v. הוכיחו כי קיים עץ פורש מינימום של G המכיל את e.

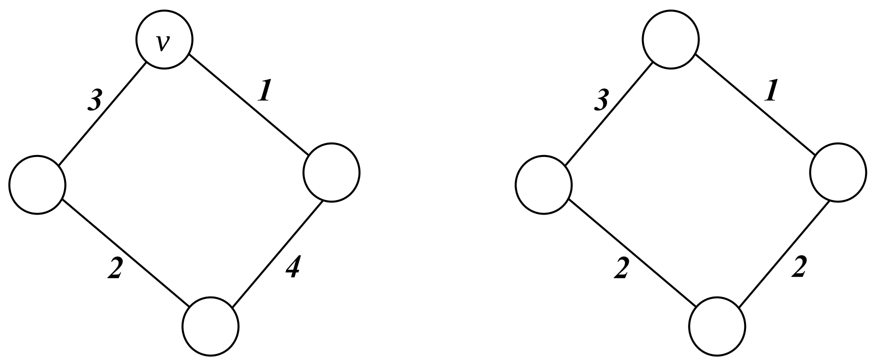
סעיף ב (10 נקודות)

נגדיר את **בעיית העלה בעץ פורש מינימום**:

קלט: גרף לא מכוון קשיר G עם פונקצית משקל $w:E\rightarrow\Re$ וקודקוד v.

יש למצוא: האם קיים עץ פורש מינימום של G בו דרגת v היא 1 (כלומר, v הוא עלה בעץ).

דוגמא:



בגרף הימני יש עץ פורש בו דרגת v היא 1 לעומת הגרף השמאלי שבו אין עץ מינימום כזה.

תארו אלגוריתם בסיבוכיות $O(|V|\log|V|+|E|)$ הפותר את בעיית העלה בעץ פורש מינימום. אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם או לנתח את זמן ריצתו.

רמז: הסתכלו על גרף השונה קצת מ- G.

בהצלחה!

תכנון אלגוריתמים– 202-1-2041
בוחן אמצע סמסטר 30.4.2010
דפי עזר לבוחן

<u>האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal)</u>

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קשיר עם פונקצית משקל $w:E\to\Re$.

1. אתחל $B\leftarrow\emptyset, C\leftarrow E$,
2. כל עוד $|B|<|V|-1$ בצע:
   2.1. הוצא צלע זולה ביותר מ- C, נקרא לה e
   2.2. אם e אינה יוצרת מעגל עם הצלעות ב- B אז $B\leftarrow B\cup\{e\}$
3. החזר את (V,B).

<u>האלגוריתם של פרים (Prim)</u>

<u>קלט</u>: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ קשיר עם פונקצית משקל $w:E\to\Re$.

1. בחר $r\in V$ כלשהו
2. אתחל $B\leftarrow\emptyset, S\leftarrow\{r\}$
3. כל עוד $|B|<|V|-1$ בצע:
   3.1. תהי (u,v) צלע זולה ביותר מבין הצלעות $(u,v)\in E$ כך ש- $u\in S, v\notin S$
   3.2. $B\leftarrow B\cup\{e\}$
   3.3. $S\leftarrow S\cup\{v\}$
4. החזר את (V,B).

<u>האלגוריתם של דיקסטרה (Dijkstra)</u>

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each vertex v ∈ V[G] do
        d[v] ← ∞
        π[v] ← NIL
  d[s] ← 0
```

```
RELAX(u, v, w)
  if d[v] > d[u] + w(u, v) then
        d[v] ← d[u] + w(u, v)
        π[v] ← u
```

```
DIJKSTRA(G, w, s)
  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
  S ← Ø
  Q ← V[G]
  while Q ≠ Ø do
       u ← EXTRACT-MIN(Q)
       S ← S ∪{u}
       for each vertex v in Q such that v∈Adj[u] do
           RELAX(u, v, w)
```

תכנון אלגוריתמים– 202-1-2041
בוחן אמצע סמסטר 30.4.2010
דפי עזר לבוחן

<u>האלגוריתם של בלמן-פורד (Bellman-Ford)</u>

```
BELLMAN-FORD (G,w,s)
Initialize-Single-Source(G,s)
for i ← 0 to |V[G]| − 1 do
   for each edge (u,v) ∈ E[G] do
        Relax(u,v,w)
for each edge (u,v) ∈ E[G] do
    if d[v] > d[u] + w(u,v) then
        return FALSE
return TRUE
```

משפטים

<u>משפט 1</u>:

יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ולא מכוון. התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. G קשיר וחסר מעגלים,
2. G חסר מעגלים ו- $|E|=|V|-1$,
3. G קשיר ו- $|E|=|V|-1$,
4. ב- G יש מסלול פשוט יחיד בין כל זוג קודקודים.

<u>משפט 2</u>:

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, לא מכוון ופשוט. יהי $T=(V,F)$ עץ פורש של G ו- $e\notin F$. אזי $H=(V,F\cup\{e\})$ מכיל מעגל יחיד, ולכל צלע e' במעגל $T'=(V,F\cup\{e\}\setminus\{e'\})$ הוא עץ פורש של G.