## שאלה 1:

נפריך את הטענה על ידי דוגמה נגדית.

יהי $A = \{p_1, p_2, p_3\}$ קבוצת פעילויות כך ש:

$$s_1 = 1,\ f_1 = 2, w_1 = 3,\ \ s_2 = 1, f_2 = 4, w_2 = 5,\ \ s_3 = 3, f_3 = 4, w_3 = 5$$

כאשר $\Delta = 2$.
האלגוריתם יחזיר את $\{p_2\}$ בתור קבוצת פעילויות במשקל מקסימאלי, אך ל $\{p_1, p_3\}$ משקל גדול יותר.

## שאלה 2:

**סעיף א:**

$$OPT(v, 0) = \infty \quad v \neq s \text{ עבור}$$

$$OPT(s, 0) = 0$$

$$OPT(v, i) = \min_{(u,v)\in E}\{OPT(u, i-1) + W(u, v)\}$$

אם אין צלעות נכנסות ל v $\quad OPT(v, i) = \infty$

**סעיף ב:**

חלוקה למקרים:

נחלק את כל המסלולים באורך בדיוק *i* מ *s* ל *v* לקבוצות. לכל *u* כך ש $(u, v) \in E$ נגדיר את הקבוצה $S_u$ כקבוצת כל המסלולים מ *s* ל *v* באורך *i* שהקודקוד הלפני אחרון בהם הוא u.

כיסוי:

לכל מסלול מ s ל v נסתכל על הקודקוד הלפני אחרון בו ונסמנו ב- u. מכיוון שזהו מסלול אזי $(v, u) \in E$ והמסלול שייך ל $S_u$.

מסקנה לצורת הנוסחא:

נסמן ב$O^*(S_u)$ אורך מסלול קל ביותר בקבוצה $S_u$.

ניתוח אופטימום של כל קבוצה בנפרד:

נוכיח $O^*(S_u) = OPT(u, i-1) + W(u, v)$.

כיוון ראשון $O^*(S_u) \leq OPT(u, i-1) + W(u, v)$: נסתכל על מסלול מ s ל u באורך i-1 ומשקל $OPT(u, i-1)$ נוסיף למסלול זה את הקודקוד v וקיבלנו מסלול מ s ל v באורך i במשקל $OPT(u, i-1) + W(u, v)$ ובו הקודקוד הלפני אחרון הינו u. כלומר זהו מסלול ב $S_u$ ולכן $O^*(S_u) \leq OPT(u, i-1) + W(u, v)$, כי $O^*(S_u)$ אורך מסלול קל ביותר בקבוצה.

כיוון שני $O^*(S_u) < OPT(u,i-1) + W(u,v)$: נסתכל על מסלול במשקל אופטימאלי ב $S_u$ נוריד ממנו את הקודקוד האחרון קיבלנו מסלול מ s ל u באורך i-1 ומשקל $O^*(S_u) - W(u,v)$. משקל מסלול זה הוא לפחות $\mathrm{OPT}(u,i-1)$ כי OPT הוא משקל מסלול כנ"ל קל ביותר.

**סעיף ג:**

$\mathrm{OPT}(v) = \min_{0 \le i \le |V|-1} \mathrm{OPT}(v,i)$.

הסבר: מכיוון שב- $G$ אין מעגלים שליליים, קיים מסלול קל ביותר פשוט. לכן אורכו $|V|-1$ לכל היותר.

**סעיף ד:**

אתחול:

לכל $v \neq s$ בצע $D(v,0) = \infty$ ,$D(s,0) = 0$.

צעד:

עבור i=1 עד |V|-1 בצע:

לכל $v \in V$ בצע:

אם קיימת צלע הנכנסת ל- $v$ אזי $D(v,i) = \min\left(D(u,i-1) + W(u,v) : (u,v) \in E\right)$, אחרת $D(v,i) = \infty$

סיום:

עבור כל $v \in V$ בצע:

$\mathrm{D}(V) = \min\left( D(V,i) \;:\; 0 \le i \le |V|-1\right)$

**ניתוח זמן ריצה:**

אתחול - $O(|V|)$, סיום - $O(|V|^2)$.

עבור i נתון כל צלע מופיעה בדיוק על עדכון D(v,i) יחיד, כלומר מחיר כל העדכונים הינו $O(|E|)$.

הלולאה רצה $O(|V|)$ פעמים ולכן סיבוכיות האלגוריתם הינה $O(|V|^2 + |V||E|)$.

**סעיף ה:**

אם $D(v) = D(u) + W(u,v)$ ו $\mathrm{D}(v) \neq \infty$ אזי $(u,v)$ נמצאת במסלול קל ביותר מ s ל v.

## שאלה 3:

**סעיף א:**

נסתכל על עפ"מ עבור הגרף G. אם e בעפ"ם סיימנו אחרת, נוסיף את e לעפ"מ ונקבל גרף H. לפי טענה שנלמדה בכיתה נסגר מעגל בגרף. המעגל עובר דרך v ולכן מכיל צלע 'e שנוגעת ב v פרט ל e. נוריד את 'e מ H ונקבל 'T. לפי אותה הטענה מקודם נקבל כי 'T הינו עץ פורש. משקלו הוא $W(T) + W(e) - W(e')$ ו $W(e) \le W(e')$ ולכן $W(T') \le W(T)$ כלומר 'T הינו עפ"מ המכיל את e.

הערה: אפשר להוכיח גם כי קיימת ריצה של האלגוריתם של פרים (או קרוסקל) שמחזירה עפ"ם שמכיל את e.

**סעיף ב:**

1) נריץ את אלגוריתם PRIM על G נסמן ב w את משקל העפ"מ שהתקבל.
2) נוריד מ G את כל הצלעות הנוגעות ב v פרט לצלע קלה ביותר ניקרא לגרף שהתקבל ב 'G.
3) נריץ את PRIM על 'G נסמן ב 'w את משקל העפ"מ שהתקבל.
4) אם $w = w'$ החזר קיים עפ"מ כנ"ל אחרת החזר לא קיים עפ"מ כנ"ל.