

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041 סמסטר ב' תשס"ט בוהן אמצע סמסטר 12.6.2009

ללא חומר עזר

הנחיות חשובות:

- הבוחן ללא חומר עזר מכל סוג שהוא.
- משך הבוחן שעתים וחצי.
- פתרו את הבוחן תחילה במחברת טיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **שימו לב: בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד!**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ-3 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- מותר להשתמש במשפטים מהכיתה ומהתרגול, אך יש לציין את הניסוח המדויק של המשפט. ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.
- **אם לא מצויין אחרת, על תאור האלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- שימו לב, לא תהינה הארכות זמן למבחן זה (פרט לסטודנטים עם אישורים).

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

שאלה זו מתייחסת לבעיה הבאה:

מופיע: גרף לא מכוון $G = (V, E)$ קשיר, פונקציה $w: E \rightarrow R$ וקבוצה $Y \subseteq E$ (של צלעות ירוקות).

פתרון חוקי (אפשרי): מבין כל העצים הפורשים של G ישנו עץ שמספר הצלעות הירוקות בו הוא מקסימאלי. יהי m המספר הזה. פיתרון חוקי הוא עץ פורש בעל m צלעות ירוקות.

יש למצוא: עץ אפשרי $T = (V, F)$ כך שמשקל העץ מינימאלי, כלומר עץ פורש בעל m צלעות ירוקות שמשקלו מינימאלי מבין עצים אלו.

סעיף א (6 נקודות)

תארו גרף ופונקציה משקל כך שכל עץ פורש עם m צלעות ירוקות איננו עפ"ם (עץ פורש מינימום). נמקו תשובתכם בקצרה.

סעיף ב (19 נקודות)

תארו אלגוריתם הפועל בזמן $O(|E| \log |V|)$ הפותר את הבעיה. אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם.

שאלה 2 (50 נקודות)

בשאלה זו נדון בגרסה ממושקלת של בעיית LCS (בעיית מחרוזת משותפת מקסימאלית) בה לכל אות יש משקל ומחפשים מחרוזת משותפת כבדה ביותר.

תזכורת: מחרוזת $Z = (z_1, \dots, z_\ell)$ היא תת-סדרה של מחרוזת $X = (x_1, \dots, x_n)$ אם קיימים אינדקסים $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n$ כך ש $z_j = x_{i_j}$ לכל $j \in \{1, \dots, \ell\}$.

בעיית מחרוזת משותפת כבדה ביותר:

מופיע: שתי מחרוזות $Z = (x_1, \dots, x_n)$ ו- $Y = (y_1, \dots, y_m)$ מעל אלפבית Σ ופונקציה משקל $w: \Sigma \rightarrow R$ כך ש- $w(a) > 0$ לכל $a \in \Sigma$.

פתרון חוקי (אפשרי): תת-סדרה משותפת של X ו- Y , כלומר מחרוזת $Z = (z_1, \dots, z_\ell)$ שהיא תת-סדרה של X וגם תת-סדרה של Y .

יש למצוא: תת-סדרה משותפת של X ו- Y כבדה ביותר, כאשר משקל מחרוזת $Z = (z_1, \dots, z_\ell)$ הוא

$$\sum_{i=1}^{\ell} w(z_i)$$

בשאלה זו תתכנו אלגוריתם מבוסס תכנון דינאמי לבעיה.

סעיף א (5 נקודות)

הגדירו במילים את תתי הבעיות שתפתרו, ואת הערכים $OPT(\dots)$ שתשתמשו בהם בנוסחת הנסיגה.

סעיף ב (17 נקודות)

נסחו נוסחת נסיגה (כולל מקרי בסיס) וציינו איפה נמצא המשקל של תת-סדרה כבדה ביותר.

סעיף ג (15 נקודות)

הוכיחו את נכונות נוסחת הנסיגה. אין צורך להוכיח את מקרי הבסיס.

סעיף ד (13 נקודות)

נסחו אלגוריתם איטראטיבי אשר מחשב את המשקל של תת-סדרה משותפת כבדה ביותר ונתחו את זמן ריצתו. אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם.

שאלה 3 (25 נקודות)

התבוננו באלגוריתם של Dijkstra בדפי העזר המצורפים.

סעיף א (10 נקודות)

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

טענה: נניח שמשקלות כל הצלעות בגרף G שונים. בהרצת האלגוריתם של Dijkstra על G כאשר מוצאים קודקוד עם $d(u)$ מינימאלי בשורה 5 של האלגוריתם, בהכרח ישנו קודקוד יחיד עם $d(u)$ מינימאלי.

סעיף ב (15 נקודות)

נניח שמשנים את האלגוריתם של Dijkstra כך שברגע שקדקוד מוכנס לתוך S מבצעים בשורה 7 של האלגוריתם $Relax(u, v, w)$ עבור כל הקדקודים השכנים v של u , אפילו אם הם כבר נמצאים ב- S . כלומר, מחליפים את שורה 7 ב-

for each vertex v such that $v \in Adj[u]$

טענה: ערכי d של הקדקודים שכבר נמצאים ב- S לא משתנים.

הוכיחו את הטענה. מותר להשתמש בטענות שהוכחו בכיתה ללא הוכחתן, אך יש לצטט אותן במדויק.

בהצלחה!