____
מספר נבחן

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041
סמסטר ב' תשס''ט
בוחן אמצע סמסטר 12.6.2009

דפי תשובות

אנא הגישו רק חלק זה.
<u>אל תחרגו מהמקום המוקצה לתשובה וגם אין חובה להשתמש בכולו.</u>

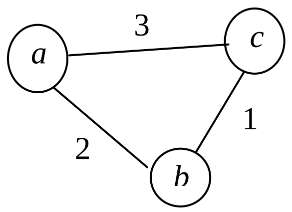
לשימוש הבודק בלבד:

שאלה	סה"כ	ניקוד
1א	6	
1ב	19	
2א	5	
2ב	17	
2ג	15	
2ד	13	
3א	10	
3ב	15	
סה"כ:	100	

מספר נבחן

שאלה 1:

סעיף א:



נתבונן בגרף $G=(V,E)$ (בציור משמאל) הבא:
$V=\{a,b,c\}$, $E=\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$ ו- $Y=\{(a,b),(a,c)\}$
קל לראות כי $m=2$ והעץ הפורש היחיד שמכיל 2 צלעות ירוקות הוא
העץ שמכיל את הצלעות $(a,b),(a,c)$ והוא כמובן אינו MST.

סעיף ב:

<u>האלגוריתם:</u>
בהינתן גרף ממושקל $G=(V,E)$ וקבוצת צלעות ירוקות $Y\subseteq E$.
1. איתחול: $F\leftarrow\phi$, $X\leftarrow E\setminus Y$ (זמן O(1))
2. כל עוד $Y\neq\phi$ (מתבצע |Y| פעמים, כלומר O(|E|) פעמים)
2.1. $e\rightarrow$ הצלע בעלת משקל מינימלי ב- Y (מתבצע בזמן O(1), אם מיינו בהתחלה בעלות O(|E|log|V|))
2.2. $Y\leftarrow Y\setminus\{e\}$ (זמן O(1))
2.3. אם e לא סוגרת מעגל ב- F (זמן O(log(|V|), נשתמש במבנה Union-Find)
2.3.1. $F\leftarrow F\cup\{e\}$ (זמן O(1))
3. כל עוד $X\neq\phi$ (ניתוח הזמן זהה לניתוח שלמעלה)
3.1. $e\rightarrow$ הצלע בעלת משקל מינימלי ב- X
3.2. $X\leftarrow X\setminus\{e\}$
3.3. אם e לא סוגרת מעגל ב- F
3.3.1. $F\leftarrow F\cup\{e\}$
4. החזר את $T=(V,F)$
מניתוח הזמן שפורט עולה כי זמן הריצה הכולל הוא סה"כ O(|E|log|V|)

שאלה 2:

סעיף א:

נגדיר $OPT(i,j)$ להיות משקל תת-סדרה כבדה ביותר של המחרוזות $X_i=(x_1,x_2,....,x_i)$,
$Y_i=(y_1,y_2,....,y_j)$ עבור $0\le i\le n$ ו- $0\le j\le m$. אנו מחפשים $OPT(n,m)$.

סעיף ב:

<u>נוסחת הרקורסיה:</u>

$$OPT(i,j)=\begin{cases}0 & , \quad i=0\vee j=0\\ w(x_i)+OPT(i-1,j-1) & , \quad x_i=y_j\\ \max\{OPT(i-1,j),OPT(i,j-1)\} & , \quad otherwise\end{cases}$$

משקל הסדרה כבדה ביותר נמצא ב- $OPT(n,m)$.

הערה: פיתרון נוסף עבור האפשרות $x_i=y_j$

$$OPT(i,j)=\max\{w(x_i)+OPT(i-1,j-1),OPT(i-1,j),OPT(i,j-1)\}$$

סעיף ג:

<u>הוכחת הנוסחה:</u>

קודם כל נוכיח עבור המקרה $x_i \neq y_j$. נחלק את כל תתי הסדרות של $x_1.....x_i$ ו- $y_1.....y_j$ לשתי קבוצות:

קבוצה 1: תתי סדרות של $x_1.....x_{i-1}$ ו- $y_1.....y_j$.

קבוצה 2: תתי סדרות של $x_1.....x_i$ ו- $y_1.....y_{j-1}$.

מכיוון ש- $x_i \neq y_j$ אזי תת-מחרוזת של $x_1.....x_i$ ושל $y_1.....y_j$ או שאינה מסתיימת ב- x_i ואז היא מקבוצה 1 או שאינה מסתיימת ב- y_j ואז היא מקבוצה 2. נסיק מכך שקיבלנו כיסוי של הפתרונות ע"י שתי הקבוצות. מסקנה מכך:

$OPT(i,j) = \max\{OPT(\text{קבוצה}1), OPT(\text{קבוצה}2)\}$ אבל ע"פ הגדרת OPT מתקיים

$OPT(\text{קבוצה}1) = OPT(i-1,j)$ וכנ"ל $OPT(\text{קבוצה}2) = OPT(i,j-1)$ ולכן במקרה זה מתקיים

$OPT\ (i,\ j) = \max\ \{OPT\ (i-1,\ j), OPT\ (i,\ j-1)\}$.

נניח כעת כי $x_i = y_j$. במקרה זה כל תת-סדרה כבדה ביותר מסתיימת ב- x_i (אחרת, היינו מוסיפים את x_i לתת-סדרה ומקבלים סדרה כבדה יותר מכיוון ש- $w(x_i) > 0$). נראה כי במקרה זה $OPT\ (i,\ j) = OPT\ (i-1,\ j-1) + w(x_i)$.

כיוון ראשון: $OPT\ (i,\ j) \geq OPT\ (i-1,\ j-1) + w(x_i)$. ניקח תת-סדרה כבדה ביותר של $x_1.....x_{i-1}$ ושל $y_1.....y_{j-1}$ ונשרשר לה את x_i. קיבלנו תת-סדרה של $x_1.....x_i$ ושל $y_1.....y_j$ שמשקלה $OPT(i-1, j-1) + w(x_i)$, ולכן משקל תת-סדרה כבדה ביותר של $x_1.....x_i$ ושל $y_1.....y_j$ גדול או שווה מערך זה.

כיוון שני: $OPT(i,\ j) \leq OPT(i-1,\ j-1) + w(x_i)$. ניקח תת-סדרה כבדה ביותר של $x_1.....x_i$ ושל $y_1.....y_j$ (שמשקלה $OPT(i,\ j)$). עפ"י האבחנה התת-סדרה הנ"ל מסתיימת ב- x_i. נוריד ממנה x_i ונקבל תת-סדרה משותפת של $x_1.....x_{i-1}$ ושל $y_1.....y_{j-1}$ שמשקלה $OPT(i,\ j) - w(x_i)$. משקל תת-סדרה זו קטן או שווה למשקל תת-סדרה כבדה ביותר של $x_1.....x_{i-1}$ ושל $y_1.....y_{j-1}$, ולכן $OPT\ (i-1,\ j-1) \geq OPT\ (i,\ j) - w(x_i)$, כלומר, קיבלנו כי $OPT\ (i,\ j) \leq OPT\ (i-1,\ j-1) + w(x_i)$.

מספר נבחן

סעיף ד:

אלגוריתם איטרטיבי:

for $i \leftarrow 1$ to n
    $M[i,0] \leftarrow 0$
for $j \leftarrow 1$ to m
    $M[0,j] \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ to n
    for $j \leftarrow 1$ to m
        if $x_i = y_j$
            $M[i,j] \leftarrow M[i-1,j-1] + w(x_i)$
            else if $M[i,j] = \max(M[i,j-1], M[i-1,j])$
return $M[n,m]$

זמן ריצה:

עלות החישוב של כל תא היא $O(1)$.

ולכן מילוי הטבלה בגודל $(n+1)*(m+1)$ לוקח $O(nm)$.

שאלה 3:

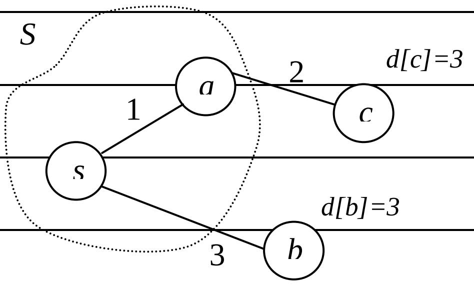
סעיף א:

הטענה אינה נכונה. נתבונן בדוגמא הבאה:

למרות שמשקלות הצלעות שונים, במשך ריצת דייקסטרה,

לאחר הוספת a, קיבלנו שעבור הקודקודים b ו- c

מתקיים $d[b]=d[c]=3$.



סעיף ב:

נשתמש בטענות הבאות (הוכחו בכיתה):

<u>טענה 1:</u> בכל שלב בריצת דייקסטרה, לכל קודקוד $v\in V$ מתקיים $d[v]\ge\delta(s,v)$.

<u>טענה 2:</u> לכל קודקוד $v\in V$, בזמן הכנסת v ל- S מתקיים $d[v]=\delta(s,v)$.

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה ויהי $v\in S$ הקודקוד הראשון כך שלאחר הכנסת הקודקוד u ל- S פעולת

ה- $\mathrm{Re}lax(u,v,w)$ שינתה את v. נסמן ב- d' את הערך של $d[v]$ לפני השינוי ונבחין כי $d'>d[v]$.

לפי טענה 2, בעת הכנסת v ל-S התקיים $d[v]=\delta(s,v)$ וכיוון ש- v הוא הקודקוד הראשון המפר את הטענה, אזי

נסיק כי $d'=\delta(s,v)$. ולכן קיבלנו ש- $d[v]$ לאחר השינוי מקיים $d[v]<d'=\delta(s,v)$ בסתירה לטענה 1.