

# תכנון אלגוריתמים 202-1-2041 – סמסטר ב' תשס"ח

בוחרן אמצע סמסטר – 27.6.2008

ללא חומר עזר

## הנחיות חשובות:

- הבוחן הינו ללא חומר עזר.
- משך הבוחן שעתיים וחצי.
- פתרו את הבוחן תחילה במחברת הטיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ-3 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- לסדר הופעת השאלות בטופס אין משמעות בהקשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה מעבודות הבית דורשת הוכחה מלאה.
- במידה והינכם מסתמכים על טענות ומשפטים מהכיתה נסחו את אלו במדויק.
- **אם לא מצויין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף.**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא.
- מומליץ מאוד לבדוק את עבודתך לפני הגשתה.

**בהצלחה!**

### שאלה 1 (25 נקודות בסה"כ)

יהי  $G = (V, E)$  גרף לא מכוון, פשוט, קשיר. תהי  $w: E \rightarrow R$  פונקציה משקל על הצלעות. תהי  $e_{\min} \in E$  צלע בגרף כך שלכל צלע  $e$  ב- $E$ , פרט ל- $e_{\min}$ , מתקיים  $w(e_{\min}) < w(e)$ . הוכיחו את הטענה הבאה:

טענה: כל עץ פורש מינימאלי של  $G$  מכיל את  $e_{\min}$ .

הערה אם אתם משתמשים בתוצאה כלשהי מעבודת הבית, עליכם להוכיח אותה.

### שאלה 2 (50 נקודות בסה"כ)

כולם שמעו את האגדה על עלי באבא, אבל לא כולם מכירים את הסיפור האמיתי. כשעלי באבא נכנס למערה הוא מצא  $n$  חפצים ממוספרים מ-1 עד  $n$ , כאשר משקלו של חפץ מספר  $i$  הוא  $w_i$ .

עלי באבא הכיר שני סוחרים של רכוש גנוב. הראשון צייד אותו בשק שיכול להכיל חפצים עד משקל כולל של  $W_1$ , והשני נתן לו שק שיכול להכיל חפצים עד משקל כולל של  $W_2$ . כל המשקלים  $w_1, \dots, w_n$  הם מספרים טבעיים.

עלי באבא ידע שעבור חפץ  $i$ , סוחר א' ישלם  $p_i$  וסוחר ב' ישלם  $q_i$  (כנראה שלכל סוחר יש שיטת תמחור שונה).

עלי באבא ניצב בפני בעיה. איזה חפצים הוא יבחר לשים בכל אחד מהשקים כך שיקבל את התשלום המקסימאלי מהסוחרים כשיחזור לעירו.

פתאום הוא נזכר בשיעורי התכנון דינאמי שלמד בביה"ס ובמהרה פתר את הבעיה! בשאלה זו אתם תפתחו את האלגוריתם מבוסס תכנון דינאמי, שעליו חשב עלי באבא.

#### סעיף א (2 נקודות)

נסחו את הבעיה בצורה פורמאלית.

#### סעיף ב (2 נקודות)

הגדירו בעברית את משמעות האיבר הכללי במערך הנבנה על ידי האלגוריתם.

#### סעיף ג (18 נקודות)

נסחו נוסחת נסיגה (כולל מקרי בסיס) וציינו את מיקומו של הערך המקסימאלי.

#### סעיף ד (12 נקודות)

הוכיחו את נכונות נוסחת הנסיגה. אין צורך להוכיח את מקרי הבסיס.

#### סעיף ה (10 נקודות)

תארו אלגוריתם איטראטיבי אשר מחשב את הרווח המקסימאלי של עלי באבא, ונתחו את זמן ריצתו.

#### סעיף ו (6 נקודות)

בהינתן הטבלה שחישבת בסעיף (ה), הראו איך ניתן לבדוק אם קיים פתרון אופטימאלי אשר כולל את החפץ מס'  $n$  (בלי הוכחה).

### שאלה 3 (25 נקודות בסה"כ)

בשאלה זה נייצג מונה על ידי מספר בבסיס 3 ונרצה למצוא חסם הדוק על זמן הריצה. כמו בתרגול ובתרגיל הבית, הפעולה שניתן לבצע על המונה היא הגדלתו ב-1. נממש את המונה בעזרת מערך של  $A$  בעל  $k$  איברים, כאשר הספרה הפחות משמעותי נמצא ב- $A[0]$ , והספרה המשמעותית ביותר נמצא ב- $A[k-1]$ .

במצב ההתחלתי  $A = 0$ , ולכן מערך הביטים כולו מאופס. על מנת להוסיף 1 לערך המונה, אנו משתמשים בשגרה להלן:

Increment(A)

- (1)  $i \leftarrow 0$
- (2) **while**  $i < \text{length}(A)$  **and**  $A[i] = 2$  **do**
- (3)      $A[i] \leftarrow 0$ ;  $i \leftarrow i+1$ ;
- (5) **if**  $i < \text{length}(A)$  **and**  $A[i] = 0$  **then**
- (6)      $A[i] \leftarrow 1$
- (7) **else if**  $i < \text{length}(A)$  **and**  $A[i] = 1$  **then**
- (8)      $A[i] \leftarrow 2$

העלות בפועל של פעולת  $\text{Increment}(A)$  היא מספר הספרות שהשתנו ב- $A$  בעקבות הפעולה. כאמור, רוצים לחשב את זמן הריצה ל- $n$  פעולות  $\text{Increment}(A)$  המתחילות במצב בו  $A = 0$  ע"י שיטת

$$\Phi(A) = \left( \sum_{i=1}^k A[i] \right) / 2$$

הפוטנציאל. נגדיר פוטנציאל של המערכת כ- $\Phi(A)$ .

### סעיף א (5 נקודות)

הציגו את חישוב מחיר הפחת של פעולת  $\text{Increment}(A)$  כאשר  $A[0] = 1$  וכל שאר האיברים ב- $A$  הם 0.

### סעיף ב (5 נקודות)

מהו מחיר הפחת של פעולת  $\text{Increment}(A)$  כאשר  $A[0] = A[1] = \dots = A[j] = 2$  ו- $A[j+1] < 2$ , עבור  $0 \leq j < k$ .

### סעיף ג (15 נקודות)

הסיקו חסם מלעיל מדויק, על סמך הסעיפים הקודמים, על העלות בפועל של  $n$  פעולות  $\text{Increment}(A)$  המתחילות במצב בו  $A = 0$ , והוכיחו את נכונותו.

**בהצלחה!**