פתרון בוחן בתכנון אלגוריתמים, 27.06.08

פתרון לשאלה 1:

נניח בשלילה כי קיים עץ פורש מינימאלי T שלא מכיל את e_min. המשפט הבא הוצג בכיתה: אם צלע נוספת לעץ פורש, אז היא סוגרת מעגל בעץ. וכך, צלע e_min סוגרת מעגל ב T.
נסיר מתת-גרף {T U {e_min צלע אחרת כלשהיא e ממעגל זה. לפי משפט 3 בדפי התוספת בבוחן, תת-הגרף המתקבל {T' = T U {e_min} \ {e קשיר. בנוסף, יש לו מספר צלעות זהה ל T, 1 - |V|.
משתי תכונות אלו, לפי משפט (3)1 בדפי התוספת בבוחן, 'T הוא עץ פורש. נשים לב כי = (w(T'
w(T) + w(e_min) - w(e) < w(T), לפי הגדרת e_min. זו סתירה להנחה כי T עץ פורש מינימאלי.
כלומר, כל עץ פורש מינימאלי מכיל את e_min.

גרסה נוספת של ההוכחה כי {T' = T \ {e} U {e_min קשיר:
יהי (e_min = (u,v. כמו שהוזכר בכיתה, לאחר מחיקת צלע e מ T, T מופרד בדיוק לשני רכיבי קשירות, המכילים את קצוות e. מכיוון ש e נמצא במסלול ב T בין u ל v, הקודקודים u ו v נמצאים בשני רכיבים שונים. וכך, הוספת e_min מחדשת את הקשירות בתת-הגרף.

גרסה נוספת של כל הפתרון:
נניח בשלילה כי קיים עץ פורש מינימאלי T שלא מכיל את e_min. המשפט הבא הוצג בכיתה: אם צלע נוספת לעץ פורש, אז היא סוגרת בעץ מעגל יחיד. וכך, צלע e_min סוגרת מעגל ב T.
נסיר מתת-גרף {T U {e_min צלע אחרת כלשהיא e ממעגל זה. מכיוון שהסרה זו הורסת את המעגל היחיד, תת-הגרף המתקבל {T' = T U {e_min} \ {e חסר מעגלים. בנוסף, יש לו מספר צלעות זהה ל T, 1 - |V|. משתי תכונות אלו, לפי משפט (2)1 בדפי התוספת בבוחן, 'T הוא עץ פורש. נשים לב כי
w(T') = w(T) + w(e_min) - w(e) < w(T), לפי הגדרת e_min. זו סתירה להנחה כי T עץ פורש מינימאלי. כלומר, כל עץ פורש מינימאלי מכיל את e_min.

שגיאות נפוצות בתשובות הבוחן (סומנו בדפי עבודות הבוחן ע"י מספר השגיאה בריבוע).

1. אין הפניה למשפט מתאים.
2. צוין כי אם יש בתת-גרף |V| צלעות אז הוא מכיל מעגל, למרות שמשפט כזה לא ניתן בחומר הקורס.

פתרון לשאלה 2:

א. <u>מופע</u>: שלשה $\left(A, W_1, W_2\right)$, כאשר W_1, W_2 מספרים טבעיים ו- $A=\left(<w_1, p_1, q_1>, \ldots, <w_n, p_n, q_n>\right)$, כאשר לכל $1 \le i \le n$, w_i הוא מספר טבעי, ו- p_i, q_i מספרים אי שליליים כלשהם.
<u>פתרון אפשרי</u>: זוג קבוצות $P, Q \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ המקיימות $P \cap Q = \varnothing$, וכן $\sum_{i \in P} w_i \le W_1$, $\sum_{i \in Q} w_i \le W_2$.

פתרון אופטימאלי: נגדיר את ערך הפתרון האפשרי P,Q למופע $\left(A,W_1,W_2\right)$ להיות $Val(P,Q)=\sum_{i\in P}p_i+\sum_{i\in Q}q_i$. פתרון אופטימאלי למופע זה הוא פתרון אפשרי P^*,Q^* המקיים

$$.Val(P^*,Q^*)=\max_{\substack{P,Q \text{ possible}\\ \text{solution for the}\\ \text{instance } (A,W_1,W_2)}} Val(P,Q)$$

ב. במערך $M_{(n+1)\times(W_1+1)\times(W_2+1)}$ בו נעזר האלגוריתם (כאשר האינדקס הקטן ביותר בכל מימד הוא 0), האיבר $M[i,W_1',W_2']$ יכיל את ערך הפתרון האופטימאלי עבור תת-המופע $\left(A_i,W_1',W_2'\right)$, כאשר $0\le W_1'\le W_1$,$0\le W_2'\le W_2$,$0\le i\le n$, ו- $A_i=\left(<w_1,p_1,q_1>,\dots,<w_i,p_i,q_i>\right)$.

ג. נגדיר את $OPT\left(i,W_1',W_2'\right)$ כערך הפתרון האופטימאלי לתת המופע $\left(A_i,W_1',W_2'\right)$, כאשר יתכן כי $W_1'<0$ או $W_2'<0$.

מקרי הבסיס: אם $W_1'<0$ או $W_2'<0$, אזי $OPT(i,W_1',W_2')=-\infty$ לכל $0\le i\le n$, ואחרת אם $i=0$ אזי $OPT(0,W_1',W_2')=0$ לכל $0\le W_1'\le W_1$, $0\le W_2'\le W_2$. אחרת:

$$OPT(i,W_1',W_2')=\max\begin{Bmatrix}OPT(i-1,W_1',W_2'),\\ OPT(i-1,W_1'-w_i,W_2')+p_i,\\ OPT(i-1,W_1',W_2'-w_i)+q_i\end{Bmatrix}$$

הערך המבוקש הוא $OPT(n,W_1,W_2)$.

ד. חלוקת הפתרונות האפשריים לתתי קבוצות: תהי S קבוצת כל הפתרונות האפשריים עבור מופען $\left(A_i,W_1',W_2'\right)$. נגדיר שלוש תתי קבוצות של S, S_0,S_1,S_2, כאשר $S_0\subseteq S$ קבוצת כל הפתרונות האפשריים P,Q בהם $i\notin P$ ו- $i\notin Q$, $S_1\subseteq S$ קבוצת כל הפתרונות האפשריים P,Q בהם $i\in P$, ו- $S_2\subseteq S$ קבוצת כל הפתרונות האפשריים P,Q בהם $i\in Q$.

החלוקה מכסה את כל הפתרונות האפשריים: בכל פתרון אפשרי P,Q מתקיים אחד מהתנאים $i\notin P$ ו- $i\notin Q$, $i\in P$, או $i\in Q$, ולכן $\left(P,Q\right)\in S_0$, $\left(P,Q\right)\in S_1$ או $\left(P,Q\right)\in S_2$. כמו כן S_0,S_1,S_2 הם תתי קבוצות של S, ולכן $S_0\cup S_1\cup S_2=S$.

מסקנה לצורה הכללית של הרקורסיה: נסמן ב- $opt(S')$ את ערך הפתרון המקסימאלי מבין ערכי כל הפתרונות האפשריים ב- $S'\subseteq S$. אזי

$$.OPT(i,W_1',W_2')=opt(S)=\max\left\{opt(S_0),opt(S_1),opt(S_2)\right\}$$

הוכחת ערכי הפתרונות המקסימאליים בתתי הקבוצות:

הפתרונות ב- S_0 **:** בכל פתרון אפשרי $\left(P,Q\right)\in S_0$, $i\notin P$ ו- $i\notin Q$, ולכן S_0 היא בדיוק קבוצת הפתרונות האפשריים עבור תת המופע $\left(A_{i-1},W_1',W_2'\right)$, ובפרט $opt(S_0)=OPT(i-1,W_1',W_2')$.

הפתרונות ב- S_1 **:** לכל פתרון אפשרי $\left(P,Q\right)\in S_0$, כיוון ש- w_i- $\sum_{j\in P\setminus\{i\}}w_j=\sum_{j\in P}w_j-w_i\le W_1'-w_i$, אזי $\left(P\setminus\{i\},Q\right)\in S_1$ פתרון אפשרי עבור $\left(A_{i-1},W_1'-w_i,W_2'\right)$. מצד שני לכל פתרון אפשרי $\left(P',Q\right)$ עבור $\left(A_{i-1},W_1'-w_i,W_2'\right)$, הפתרון $\left(P'\cup\{i\},Q\right)$ הוא פתרון אפשרי עבור $\left(A_i,W_1',W_2'\right)$. כלומר, קבוצת הפתרונות המתקבלים ע"י הסרת i מ- P בפתרונות ב- S_1 היא בדיוק קבוצת הפתרונות האפשריים עבור תת המופע $\left(A_{i-1},W_1'-w_i,W_2'\right)$, כאשר הפרש הערכים בין כל זוג

פתרונות מתאימים הוא ערך החפץ ה-i בשק הראשון p_i. בפרט, $opt(S_1) = OPT(i-1, W_1'-w_i, W_2') + p_i$.

באותו אופן כמו עבור S_1, ניתן להראות כי $opt(S_2) = OPT(i-1, W_1', W_2'-w_i) + q_i$. מסקנה:

$$OPT(i, W_1', W_2') = opt(S) = \max\begin{Bmatrix} opt(S_0), \\ opt(S_1), \\ opt(S_2) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} OPT(i-1, W_1', W_2'), \\ OPT(i-1, W_1'-w_i, W_2') + p_i, \\ OPT(i-1, W_1', W_2'-w_i) + q_i \end{Bmatrix},$$

כנדרש.

ה. <u>האלגוריתם</u>:

<u>מופע</u>: (A, W_1, W_2). <u>פלט</u>: הרווח המקסימאלי שניתן להשיג עבור המופע הנתון.

1) צור מערך $M_{(n+1)\times(W_1+1)\times(W_2+1)}$.
2) לכל $0 \le W_1' \le W_1$ בצע:
3) לכל $0 \le W_2' \le W_2$ בצע:
4) אתחל $M[0, W_1', W_2'] \leftarrow 0$.
5) עבור $i \leftarrow 1$ עד n בצע:
6) לכל $0 \le W_1' \le W_1$ בצע:
7) לכל $0 \le W_2' \le W_2$ בצע:
8) אתחל $M[i, W_1', W_2'] \leftarrow M[i-1, W_1', W_2']$.
9) אם $W_1' - w_i \ge 0$, בצע $M[i, W_1', W_2'] \leftarrow \max\{M[i, W_1', W_2'], M[i-1, W_1'-w_i, W_2'] + p_i\}$.
10) אם $W_2' - w_i \ge 0$, בצע $M[i, W_1', W_2'] \leftarrow \max\{M[i, W_1', W_2'], M[i-1, W_1', W_2'-w_i] + q_i\}$.
11) החזר $M[n, W_1, W_2]$.

<u>זמן הריצה</u>: אתחול המערך בשורות 2-4 ממלא $(W_1+1)\cdot(W_2+1)$ תאים במערך, כל אחד בזמן $O(1)$, ובסך הכול דורש זמן ריצה של $O(W_1 \cdot W_2)$. הלולאה המכוננת בשורות 5-10 מחשבת את ערכי כל התאים במערך (מלבד אלו שחושבו באתחול), כאשר חישוב כל תא מתבצע בשורות 8-10 ודורש זמן של $O(1)$, ולכן הזמן עבור ביצוע הלולאה הוא $O(n \cdot W_1 \cdot W_2)$. בסך הכל, זמן ריצת כל האלגוריתם הוא $O(n \cdot W_1 \cdot W_2)$.

ו. אם $M[n, W_1, W_2] = M[n-1, W_1 - w_n, W_2] + p_n$ או $M[n, W_1, W_2] = M[n-1, W_1, W_2 - w_n] + q_n$, אזי קיים פתרון אופטימאלי הכולל את חפץ מס' n, אחרת לא קיים פתרון כזה.

הערה: התנאי $M[n, W_1, W_2] \ne M[n-1, W_1, W_2]$ הוא התנאי שחפץ מס' n מופיע <u>בכל</u> פתרון אופטימאלי, ולכן שגוי.

פתרון לשאלה 3:

<u>א. 5 נקודות</u>

נסמן ב A_1 את הערך של A לפני הפעולה וב A_2 את הערך של A אחריה.

$$\hat{C}_1 = C_1 + \Phi(D_2) - \Phi(D_1) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} A_2[i]/2 - \sum_{i=0}^{k-1} A_1[i]/2 = 1 + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

<u>ב. 5 נקודות</u>

נסמן ב A_1 את הערך של A לפני הפעולה וב A_2 את הערך של A אחריה.

יהי m סכום הערכים בתאים מ j+2 ועד k-1, ויהי l ערך התא ה j+1 לפני הפעולה.

$$C_2 = j+1+1 = j+2$$

$$\hat{C}_2 = C_2 + \Phi(A_2) - \Phi(A_1) = j+2 + \sum_{i=0}^{k-1} A_2[i]/2 - \sum_{i=0}^{k-1} A_1[i]/2 =$$

$$= j+2+\frac{m+l+1}{2} - \frac{m+l+2(j+1)}{2} = \frac{3}{2}.$$

<u>ג. 15 נקודות</u>

הפעולות המתוארות בסעיפים א' וב' מכסות את כל האפשרויות של פעולות Increment על A. לכן, $\hat{C}_i = \frac{3}{2}$ לכל i חיובי (כאשר C_i הוא המחיר של פעולת ה Increment ה i-ית). לכל סדרה של n פעולות Increment מתקיים $\sum_{i=1}^{i=n} \hat{C}_i = \sum_{i=1}^{i=n} (C_i + \Phi(A_i) - \Phi(A_{i-1})) = \sum_{i=1}^{i=n} C_i + \Phi(A_n) - \Phi(A_0)$. מכיוון ש $\Phi(A_0) = 0$ וגם $\Phi(A_n) \geq 0$ לכל n, מתקיים $\sum_{i=1}^{i=n} C_i \leq \sum_{i=1}^{i=n} \hat{C}_i = \frac{3n}{2}$. לכן, לכל n, $\frac{3n}{2}$ הוא חסם עליון עבור $\sum_{i=1}^{i=n} C_i$.