תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

פתרון בוחן אמצע סמסטר

סמסטר ב' תשע"ד

שאלה 1

<u>תיאור האלגוריתם</u>

- הרץ אלגוריתם $Prim$ למציאת עץ פורש מינימום $T = (V, E')$ של G.
- עבור על כל הקשתות שאינן ב-E', והוסף ל-E' כל קשת כזו אם משקלה שלילי.
- החזר את תת הגרף (V, E').

<u>זמן ריצה</u>

זמן ריצת $Prim$ בשימוש עם ערימת פיבונאצ'י - $O(|E| + |V|\log|V|)$.
מעבר על הקשתות שאינן ב-E' בזמן $O(|E|)$.
סה"כ זמן ריצה: $O(|E| + |V|\log|V|)$.

<u>הערות</u>

1. אין צורך לרשום את אלג' $Prim$ בפתרון. ניתן להשתמש באלג' זה ללא פירוט מאחר והוא חלק מחומר הקורס.
2. שימוש באותו הרעיון עם $Kruskal$ לא יניב את זמן הריצה הרצוי, מאחר ו-$Kruskal$ דורש שהקשתות יהיו ממוינות. מיון הקשתות לבדו דורש $O(|E|\log|E|)$ זמן, וזה יותר מהזמן הנדרש.
3. הנכונות של האלג' הנ"ל לא ברורה. הוכחתה אינה קלה.

שאלה 2

<u>סעיף א' – הגדרת תתי בעיות וערך OPT:</u>

נקבע: $flag = 0$ מסמן זוגי, $flag = 1$ מסמן אי-זוגי.
לכל $v \in V$ ולכל $flag \in \{0,1\}$ נגדיר:
$OPT[v, flag]$ – אורך מסלול מקסימלי מ-s ל-v באורך זוגי/אי-זוגי בהתאם לערך $flag$, או $-\infty$ אם לא קיים מסלול כנ"ל.

סעיף ב' – הצגת נוסחת המבנה:

לכל $v \in V$ ולכל $flag \in \{0,1\}$:

$$OPT[v, flag] = \begin{cases} 0, & v = s \wedge flag = 0 \\ -\infty, & v = s \wedge flag = 1 \\ \max\{\{OPT[u, 1 - flag] + 1 : (u, v) \in E\} \cup \{-\infty\}\}, & else \end{cases}$$

אנחנו מחפשים את ערך הפתרון: $OPT[t, inp]$, כאשר inp משתנה הדגל שבקלט.

סעיף ג' – הוכחת נכונות נוסחת המבנה:

סכימה 1

מקרי בסיס – המסלול היחיד באורך זוגי מ-s לעצמו הוא המסלול הריק מאורך 0, ואכן מהגדרה $OPT[s, 0] = 0$. בנוסף, לא קיים מסלול כנ"ל מאורך אי-זוגי, אחרת זהו מעגל ממש בגרף, בסתירה לכך שאינו מכיל מעגלים, ואכן $OPT[s, 1] = -\infty$.

נוכיח עתה נכונות הנוסחא עבור $OPT[v, flag]$ כאשר $v \neq s$:

ניתוח מקרים – נחלק את כל הפתרונות האפשריים לקבוצות. עבור קשת (u, v) נגדיר S_u כל המסלולים החוקיים (מאורך $flag$) מ-s ל-v כך שהקשת האחרונה במסלול היא (u, v).

תת הקבוצות הנ"ל מכסות את כל הפתרונות האפשריים – ניקח פתרון כלשהוא לבעיה (במידה וקיים). זהו מסלול P מ-s ל-v. תהי (u, v) הקשת האחרונה במסלול. אזי $P \in S_u$.

מסקנה לצורת נוסחת המבנה – נגדיר $O^*(S_u)$ להיות אורך מסלול מקסימלי ב-S_u, או $-\infty$ אם אין כזה.

$$OPT[v, flag] = \max\{O^*(S_{u_1}), \dots, O^*(S_{u_k}), -\infty\}$$

כאשר $u_1, \dots, u_k$ שכניו של v (קיימת קשת מהם ל-v). ייתכן ואין שכנים כאלו כלל, לכן יש צורך להוסיף $-\infty$ בנוסחא.

ניתוח האופטימום של כל קבוצה – לכל $(u, v) \in E$ מתקיים: $O^*(S_u) = OPT[u, 1 - flag] + 1$.

$\leq$ יהי P מסלול מאורך מקסימלי בקבוצה S_u, כלומר $|P| = O^*(S_u)$. אם לא קיים מסלול כזה, אזי $O^*(S_k) = -\infty$ ואי-השוויון מתקיים. אחרת, מהגדרת S_u ניתן לרשום $P = \langle s, \dots, u, v \rangle$. נתבונן ברישא $P' = \langle s, \dots, u \rangle$. זהו מסלול מאורך $1 - flag$ מ-s ל-u, ולכן מהגדרת אופטימליות $O^*(S_u) = |P| = |P'| + 1 \leq OPT[u, 1 - flag] + 1$.

$\geq$ יהי $P = \langle s, \dots, u \rangle$ מסלול מקסימלי באורכו מ-s ל-u מאורך $1 - flag$, כלומר $|P| = OPT[u, 1 - flag]$. אם לא קיים כזה, אזי $OPT[u, 1 - flag] = -\infty$ ואי-השוויון מתקיים. אחרת, נתבונן ב-$P' = P \circ (u, v)$. זהו מסלול מ-s ל-v מאורך $flag$ שהקשת האחרונה בו היא (u, v), ולכן $P' \in S_u$. מהגדרת $O^*(S_u)$ כאורך מסלול מקסימלי ב-S_u מתקיים:

$$OPT[u, 1 - flag] + 1 = |P| + 1 = |P'| \leq O^*(S_u)$$

סכימה 2

תחילה נשים לב כי מתקיים $OPT[v, flag] < |V|$, זאת כי כל מסלול בגרף מ-s ל-v (במידה וקיים כזה) הוא מסלול פשוט, מאחר והגרף לא מכיל מעגלים, ובפרט אורכו $< |V|$.

עבור $v = s$: המסלול היחיד באורך זוגי מ-s לעצמו הוא המסלול הריק מאורך 0, ואכן מהגדרה $OPT[s, 0] = 0$. בנוסף, לא קיים מסלול כנ"ל מאורך אי-זוגי, אחרת זהו מעגל ממש בגרף, בסתירה לכך שאינו מכיל מעגלים, ואכן $OPT[s, 1] = -\infty$.

עבור $v \neq s$: אם לא קיימת קשת $(u, v) \in E$ אזי לא קיים מסלול מ-s ל-v, ולכן מהגדרה $OPT[v, flag] = -\infty$, ונכונות הנוסחה נובעת ישירות מהגדרתה.

נניח כי קיימת קשת נכנסת ל-v. נוכיח את נכונות נוסחת המבנה במקרה זה עבור $OPT[v,flag]$.

$$\mathrm{OPT}[\mathrm{v},\mathrm{flag}] \le \max\{\{OPT[u,1-flag]+1 : (u,v)\in E\}\cup\{-\infty\}\}$$ (I

אם $OPT[v,flag]=-\infty$ ברור כי מתקיים אי-שוויון זה. אחרת, נראה כי קיימת $(u,v)\in E$ כך שמתקיים: $OPT[v,flag]=OPT[u,1-flag]+1$ (ובפרט מתקיים אי-השוויון).
יהי $P=\langle s,\dots,u,v\rangle$ מסלול מאורך מקסימלי, כלומר $|P|=OPT[v,flag]$ (קיים כזה מאחר והנחנו $OPT[v,flag]>-\infty$). נסמן $P'=\langle s,\dots,u\rangle$. זהו מסלול מ-$s$ ל-u מאורך $1-flag$. כמו כן זהו מסלול מקסימלי באורכו כנ"ל, אחרת קיים מסלול H מ-s ל-t מאורך $1-flag$ כך שמתקיים $|H|>|P|$. אזי $H\circ(u,v)$ מסלול מ-s ל-v מאורך $flag$, ואורכו גדול ממש מ-P, בסתירה למקסימליות P. סה"כ קיבלנו:

$$OPT[v,flag]=|P|=|P'|+1=OPT[u,1-flag]+1$$

$$\mathrm{OPT}[\mathrm{v},\mathrm{flag}] \ge \max\{\{OPT[u,1-flag]+1 : (u,v)\in E\}\cup\{-\infty\}\}$$ (II

נראה כי לכל $(u,v)\in E$ קיים פתרון לבעיה שעלותו $OPT[u,1-flag]+1$ (כאשר $-\infty$ נחשב כעלות פתרון). בפרט $OPT[v,flag]\ge OPT[u,1-flag]+1$ מהגדרתו כעלות פתרון אופטימלי. מאחר ואי-השוויון מתקיים לכל איבר בצד ימין של המשוואה, הרי שהוא גם מתקיים ל-max על פני איברים אלו.
תהי $(u,v)\in E$. אם $OPT[u,1-flag]=-\infty$ הרי שסיימנו. אחרת, יהי $P=\langle s,\dots,u\rangle$ מסלול מאורך $1-flag$ המקיים $|P|=OPT[u,1-flag]$. אזי $P\circ(u,v)$ מסלול מ-s ל-v מאורך $flag$ ואורכו $OPT[u,1-flag]+1=|P|+1$ כנדרש.

משני אי-שיוויונים אלו קיבלנו שוויון בין ערכים אלו כנדרש.

סעיף ד' – תיאור אלגוריתם:

נחשב מיון טופולוגי של G. נסמן את הקודקודים לפי המיון $v_1,\dots,v_n$.
נאתחל לכל $v\in V$: $d[v,0]=d[v,1]=-\infty$. נעדכן $d[s,0]=0$.

For $i=1$ to n and $v_i\ne s$ do:
  $For\ each\ (v_j,v_i)\in E$
    $If\ d[v_i,0]<d[v_j,1]+1\ :\ \ d[v_i,0]\leftarrow d[v_j,1]+1$
    $If\ d[v_i,1]<d[v_j,0]+1\ :\ \ d[v_i,1]\leftarrow d[v_j,0]+1$
$return\ d[t,inp]$

סעיף ה' – נכונות האלגוריתם:

נוכיח נכונות האלג' באינדוקציה שלמה על סדר הקודקודים במיון הטופולוגי.
<u>בסיס</u>: עבור v_1 לא קיימות קשתות נכנסות מהגדרת מיון טופולוגי, ואכן ערכי d שלו מאותחלים בהתאם לנוסחת המבנה (בהתאם למקרה $v_1=s$ או $v_1\ne s$), וערכים אלו לא ישתנו.
<u>צעד</u>: נניח נכונות עבור $i<k$, נוכיח עבור k.
אם לא קיימות קשתות נכנסות ל-v_k אזי ערכי d שלו מאותחלים בהתאם לנוסחת המבנה (בהתאם למקרה $v_k=s$ או $v_k\ne s$), וערכים אלו לא ישתנו.
אחרת, עבור $(v_j,v_k)\in E$, מהגדרת מיון טופולוגי v_j מופיע לפני v_k במיון, ולכן מה.א. ערכי d עבורו כבר חושבו נכון. לולאת ה-for הפנימית מחשבת את ערך $d[v,0],d[v,1]$ לפי נוסחת המבנה,

שנכונותה הוכחה. זאת כי מחפשים את הערך המקסימלי $d[u, 1 - flag] + 1$ על פני כל הקשתות הנכנסות (u, v), ועתה ראינו שערכים אלו כבר חושבו בזמן זה, ומכאן נכונות האלג'.

סעיף ו' – ניתוח זמן ריצת האלגוריתם:

מיון טופולוגי בזמן $O(|V| + |E|)$.
אתחול ערכי $d[v, flag]$ בזמן $O(|V|)$.
בלולאה הראשית עוברים על כל קודקוד פעם אחת, ולכל קודקוד עוברים על כל הקשתות הנכנסות אליו, וזאת בזמן $O(|V| + |E|)$.
סה"כ זמן ריצה: $O(|V| + |E|)$.

טעויות נפוצות עבור שאלה 2:

א. הגדרת תת בעיה:
- הגדרת תת בעיה אופיינית לכל זוגות הקודקודים בגרף (גורר מספר ריבועי של תתי בעיות).
- הגדרת תת בעיה אופיינית ללא התייחסות לזוגיות.
- הגדרת ערך OPT כפתרון (מסלול) ולא כערך של פתרון (אורך המסלול)

ב. נכונות הנוסחא:
- אי התייחסות לזוגיות

ג. הוכחת נכונות הנוסחא:
- חלוקה שגוייה למקרים (ע"פ זוגיות או לפי אורכי המסלולים)
- שימוש במונחים אלגוריתמיים בעת ההוכחה ("הצלחנו למצוא", "הגענו", "לא נתקע" "במסלול שמצאנו מ-s ל-t" וכדומה).
- נסיון להוכיח את המקרה הכללי בנוסחא ע"י אינדוקציה
- נסיון להוכיח ע"י תיאור מילולי של הנוסחא ללא שימוש בסכימת הוכחה נכונה.
- אי הוכחת מקרי קצה

ד. אלגוריתם:
- אלגוריתם רקורסיבי
- אלגוריתם לא ליניארי
- סדר שגוי של מעבר על קודקודים: BFS/שימוש בתור/שימוש בערימות

ה. הוכחת האלגוריתם:
- תיאור האלגוריתם במילים במקום הסבר נכונות
- חוסר טענה על סדר נכון של חישוב הערכים
- חוסר טענה על נכונות הערכים המחושבים – באינדוקציה (כאן מתחייבת אינדוקציה).

שאלה 3

סעיף א':

תזכורת: עבור $u \in S$ מתקיים $d[u] = \delta[u]$.

נוכיח באינדוקציה על k, מס' האיטרציות.

בסיס: $k = 0$. $S = \emptyset$, ולכן לכל $v \neq s$ מתקיים $\{d[u] + w(u,v) |\ (u,v) \in E \wedge u \in S\} = \emptyset$.
ואכן $d[v] = \infty$ לפי האתחול.

צעד: נניח נכונות הטענה לאחר k איטרציות, ונוכיח עבור $k + 1$ איטרציות.
נסמן S, S' את S לאחר $k, k + 1$ איטרציות בהתאמה. יהי x הקודקוד שנבחר באיטרציה ה-$k + 1$,
כלומר $S = S' \cup \{x\}$, ויהי $v \in V \backslash S$. נסמן d, d' את ערך $d[v]$ בסיום האיטרציה ה-$k, k + 1$
בהתאמה. מתקיים $v \in V \backslash S'$ בסיום האיטרציה ה-k, ולכן מהנחת האינדוקציה:

$$d' = \min\{\{d[u] + w(u,v) |\ (u,v) \in E \wedge u \in S'\}; \infty\} \ (*)$$

מקרה I: $(x,v) \notin E$
$\{d[u] + w(u,v) | (u,v) \in E \wedge u \in S\} = \{d[u] + w(u,v) | (u,v) \in E \wedge u \in S'\}$.
באיטרציה $k + 1$ מבצעים $Relax$ רק על קשתות יוצאות מ-x, לכן ערך $d[v]$ לא ישתנה, ונקבל
$d = d'$, וזהו הערך הנדרש לפי מה שהראנו עתה, ולפי התזכורת.

מקרה II: $(x,v) \in E$
אזי יתבצע $Relax(x,v,w)$ באיטרציה ה-$k + 1$, ולכן יתעדכן $d = \min\{d', d[x] + w(x,v)\}$.
נחליף את d' ב-(*), ונשתמש בעובדה כי $S = S' \cup \{x\}$ ונקבל (בהסתמך על התזכורת) כי
$d = \min\{\{d[u] + w(u,v) | (u,v) \in E \wedge u \in S\}; \infty\}$ כנדרש.

סעיף ב':

נוכיח באינדוקציה על k, מס' האיטרציות, כי בסיום האיטרציה ה-k מתקיים:
(1) לכל $u \in S$ קיים מסלול מ-s ל-u, כולו מקודקודי S, כך שמשקלו $d[u] = \delta[u]$.
(2) לכל $v \notin S$ כך ש-$d[v] < \infty$: $d[v]$ משקל מסלול קל ביותר מ-s ל-v שכולו ב-S מלבד v.

בסיס: $k = 0$. $S = \emptyset$, ו-s היחיד המקיים $d[s] = 0 < \infty$, ואכן המסלול הריק מ-s לעצמו במשקל 0.

צעד: נניח נכונות הטענה לאחר k איטרציות, נוכיח לאחר $k + 1$ איטרציות.
נסמן S, S' את S לאחר $k, k + 1$ איטרציות בהתאמה. יהי x הקודקוד שנבחר באיטרציה ה-$k + 1$,
כלומר $S = S' \cup \{x\}$.

הוכחת (1): לפי ה.א. הטענה נכונה לכל $u \in S'$ (בתחילת האיטרציה קיים מסלול כזה שכולו ב-S',
ובפרט בסופה כולו ב-S). בעת הוספת x מתקיים $d[x] = \delta[x] < \infty$ (נתון כי כל הקודקודים נגישים
מ-s), לכן לפי ה.א. (טענה (2)) בתחילת האיטרציה קיים מסלול P מ-s ל-x במשקל $d[x]$ שכולו ב-S'
מלבד x. מאחר וערך $d[x]$ לא משתנה באיטרציה זו, ו-x נוסף ל-S, הרי ש-P כולו ב-S בסיום
האיטרציה ומשקלו $d[x]$ כנדרש.

הוכחת (2): יהי $v \in V \backslash S$ כך ש-$d[v] < \infty$. יהי $u \in S$ כך ש: $d[v] = d[u] + w(u,v)$. קיים כזה
מסעיף א'. לפי טענה (1) (אותה כבר הוכחנו) קיים מסלול P מ-s ל-u שכולו ב-S ומשקלו $d[u]$. לכן
$P' = P \circ (u,v)$ מסלול מ-s ל-v שכולו ב-S מלבד v ומשקלו $w(P') = w(P) + w(u,v) =$
$d[v] = d[u] + w(u,v)$. נב"ש שמסלול זה לא מינימלי, ויהי $T = \langle s, \dots, y, v \rangle$ מסלול שכל
קודקודיו ב-S מלבד v ממשקל קטן יותר. מהגדרתו $y \in S$. נסמן $T' = \langle s, \dots, y \rangle$, אזי מתקיים מהגדרת
δ ולפי התזכורת: $w(T') \geq \delta[y] = d[y]$. לכן:

$d[v] = w(P) > w(T) = w(T') + w(y,v) \geq d[y] + w(y,v)$ בסתירה למינימליות u מסעיף א'.

טעויות נפוצות עבור שאלה 3:

סעיף א:

- הוכחה עבור $v \in S$, ולא עבור $v \in V\setminus S$.
- אי שימוש בהנחת האינדוקציה.
- אי התייחסות לכך ש-S קבוצה המשתנה במהלך האלג'.
- הוכחת $d[v] = \infty$ או $d[v] < \infty$, ללא שוויון ל-min הנדרש.
- אי התייחסות למקרה $v \in V\setminus S$ ו-$(u,v) \notin E$, כאשר u הקודקוד שנוסף ל-S באיטרציה הנוכחית בשלב האינדוקציה.

סעיף ב:

- הוכחה עבור $v \in S$, ולא עבור $v \in V\setminus S$.
- הנחה ללא הוכחה כי עבור $v \in S$ המסלול באורך $d[s] = \delta[s]$ מורכב כולו מקודקודי S.
- הנחה (שגויה) כי מסלול רק מקודקודי S מלבד נקודת הקצה הוא מסלול קצר ביותר בגרף.