תכנון אלגוריתמים 202-1-2041

סמסטר ב׳ תשע״א

בוחן אמצע סמסטר 1.4.2011

ללא חומר עזר.

<u>הנחיות חשובות:</u>

- הבוחן ללא חומר עזר מכל סוג שהוא.
- משך הבוחן שעתיים וחצי.
- פתרו את הבוחן תחילה במחברת טיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **שימו לב: בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד!**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ-3 שאלות, יש לענות על כל השאלות.
- מותר להשתמש במשפטים מהכיתה ומהתרגול, אך יש לציין את הניסוח המדויק של המשפט. ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.
- **אם לא מצוין אחרת, על תאור האלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו ״לא יודעים״ ותזכו ב- 20% מניקוד הסעיף.**
- שימו לב, לא תהיינה הארכות זמן למבחן זה (פרט לסטודנטים עם אישורים).

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

נתונות שתי הבעיות הבאות:

בעיית הקודקוד הדומיננטי:

מופע: יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון וקשיר, יהיו $s, t \in V$ שני קודקודים.

כמו כן נתון קודקוד d בגרף. נתון כי $d \in V \setminus \{s, t\}$. נכנה את d הקודקוד הדומיננטי.

נגדיר מסלול קודקוד דומיננטי כמסלול (לא בהכרח פשוט) המתחיל ב- s, מסתיים ב- t **ועובר דרך d.**

יש למצוא: מסלול קודקוד דומיננטי קצר ביותר.

שימו לב כי בניגוד לשאלה בשעורי הבית, המסלול לא חייב להיות באורך זוגי.

בעיית הצלע הדומיננטית:

מופע: יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון וקשיר, יהיו $s, t \in V$ שני קודקודים.

כמו כן נתונה צלע e בגרף. נכנה את e הצלע דומיננטית.

נגדיר מסלול צלע דומיננטית כמסלול (לא בהכרח פשוט) המתחיל ב- s, מסתיים ב- t, **ועובר דרך e.**

יש למצוא: מסלול צלע דומיננטית קצר ביותר.

סעיף א' (15 נקודות)

תארו אלגוריתם יעיל מבוסס רדוקציה לבעיית הקודקוד הדומיננטי, בו הרדוקציה רצה בזמן של לכל היותר $O(|V| + |E|)$. התבוססו על קופסא שחורה הפותרת את בעיית הצלע הדומיננטית.
הוכיחו את נכונות האלגוריתם שהצעתם ונתחו את זמן ריצת הרדוקציה (ללא זמן הריצה של הקופסא השחורה).

סעיף ב' (10 נקודות)

תארו אלגוריתם יעיל מבוסס רדוקציה לבעיית הצלע הדומיננטית, בו הרדוקציה רצה בזמן של לכל היותר $O(|V| + |E|)$. התבוססו על קופסא שחורה הפותרת את בעיית הקודקוד הדומיננטי.
אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם שהצעתם ואת זמן ריצתו.

שאלה 2 (20 נקודות)

סעיף א' (3 נקודות)

הראו דוגמא של גרף בעל שני עצים פורשים מינימום שונים.

סעיף ב' (17 נקודות)

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר לא מכוון עם משקולות על קשתות ויהיו $T_1 = (V, E_1)$ ו- $T_2 = (V, E_2)$ עצים פורשים מינימום שונים של G.

הוכיחו כי בגרף האיחוד $(V, E_1 \cup E_2)$ קיים מעגל בו לפחות זוג קשתות אחד בעל משקל זהה.

שאלה 3 (55 נקודות)

בשאלה זו נתייחס לבעיית החלוקה לקטעים בגודל M **הממושקלת**.

קלט:

- קבוצת מספרים שלמים $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ כך ש- $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$, $q_1 = 1$.
- קבוצת משקולות $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ כך ש w_i הוא המשקל המיוחס ל- q_i.
- מספר שלם חיובי M.

פתרון חוקי: קבוצה $S = \{S_1, \ldots, S_n\} \subseteq Q$ כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

- $S_1 = 1$, $S_n = q_m$.
- $S_1 < S_2 < \ldots < S_n$.
- לכל $2 \le i \le n$ מתקיים כי $S_i - S_{i-1} \le M$.

נגדיר את משקל S כ- $\sum_{\substack{i\in\{1..n\} \\ S_i \in S}} w_i$.

יש למצוא: פתרון חוקי S עם משקל מינימום, או להחזיר "אין פתרון" אם לא קיים פתרון חוקי.

בשעורי הבית פתרנו שאלה דומה בעזרת האלגוריתם החמדן הבא.

1. $S \leftarrow \{q_1\}$
2. $r \leftarrow 1$ (סימון לאינדקס האיבר האחרון ב- S)
3. כל עוד $r < m$ בצע
   a. יהי $q_i \in Q$ המקסימאלי כך ש- $(q_i - q_r) \le M$
      i. אם לא קיים כזה החזר "אין פיתרון"
      ii. אחרת:
         1. $S = S \cup \{q_i\}$
         2. $r \leftarrow i$
4. החזר את S

סעיף א' (5 נקודות)

האלגוריתם מבוסס בחירה חמדנית אינו פותר את בעיית חלוקה לקטעים ממושקלים.
תארו דוגמא של קלט עבורו אלגוריתם מבוסס הבחירה החמדנית הנ"ל יכשל.

עבור סעיפים ב'-ה' נגדיר את $opt(j)$ להיות משקל פתרון חוקי מינימאלי עבור הקלט $\{q_1, \ldots, q_j\}$ ו- M. שימו לב, הקלט מכיל רק את j האיברים הראשונים. פתרון חוקי עבור קלט זה מכיל את q_j.

סעיף ב' (15 נקודות)

נסחו את נוסחת המבנה עבור ה- opt שהוגדר, כולל מקרי בסיס.

סעיף ג' (20 נקודות)

הוכיחו את נוסחת המבנה. יש להשתמש בסכמת ההוכחה שנלמדה בכיתה.

סעיף ד' (10 נקודות)

נסחו אלגוריתם יעיל **איטראטיבי** למציאת ערך פתרון אופטימאלי ונתחו את זמן ריצתו (אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתם).

סעיף ה' (5 נקודות)

בעזרת המערך שחושב בסעיף הקודם, הראו אלגוריתם הבודק ב- $O(1)$ האם קיים פתרון אופטימאלי המכיל את q_{m-1}.

דפי עזר לבוחן

<u>האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal)</u>

<u>קלט:</u> גרף לא מכוון $G = (V, E)$ קשיר עם פונקצית משקל $w: E \to \mathcal{R}$.

1. אתחל $C \leftarrow E$, $B \leftarrow \emptyset$
2. כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
   2.1. הוצע צלע זולה ביותר מ- C, נקרא לה e.
   2.2. אם e אינה יוצרת מעגל עם צלעות ב- B אז $B \leftarrow B \cup \{e\}$
3. החזר את (V, B).

<u>האלגוריתם של פרים (Prim)</u>

<u>קלט:</u> גרף לא מכוון $G = (V, E)$ קשיר עם פונקצית משקל $w: E \to \mathcal{R}$.

1. בחר $r \in V$ כלשהוא
2. אתחל $S \leftarrow \{r\}$, $B \leftarrow \emptyset$
3. כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
   3.1. תהי (u, v) צלע זולה ביותר מבין הצלעות $(u, v) \in E$, כך ש- $u \in S$, $v \notin S$.
   3.2. $B \leftarrow B \cup \{u\}$
   3.3. $S \leftarrow S \cup \{v\}$
4. החזר את (V, B).

<u>משפט 1</u>:

יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט ולא מכוון. התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. G קשיר וחסר מעגלים,
2. G חסר מעגלים ו- $|E| = |V| - 1$,
3. G קשיר ו- $|E| = |V| - 1$,
4. ב- G יש מסלול פשוט יחיד בין כל זוג קודקודים.

<u>משפט 2</u>:

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר, לא מכוון ופשוט. יהי $T = (V, F)$ עץ פורש של G ו- $e \notin F$. אזי $H = (V, F \cup \{e\})$ מכיל מעגל יחיד, ולכל צלע e' במעגל $T' = (V, F \cup \{e\} \setminus \{e'\})$ הוא עץ פורש של G.

<u>משפט 3</u>:
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, קשיר וממושקל ותהי $e \in E$ צלע **כבדה ממש** במעגל C ב- G.
(לכל $e' \in C$,$e' \neq e$ מתקיים כי $w(e) > w(e')$). אזי **לא קיים עפ"מ** של G המכיל את e.

<u>משפט 4</u>:
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, קשיר וממושקל ותהי $e \in E$ צלע **כבדה** במעגל C ב- G.
(לכל $e' \in C$,$e' \neq e$ מתקיים כי $w(e) \geq w(e')$). אזי **קיים עפ"מ** של G **שלא** מכיל את e.

<u>משפט 5</u>:
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, קשיר וממושקל. תהי $S \subset V, S \neq \emptyset$ קבוצת קודקודים ותהי $e \in E$ צלע **קלה ממש** בחתך $(S, V \setminus S)$.
(לכל צלע $e' = (u', v')$ המקיימת $u' \in S$ ו- $v' \in V \setminus S$ מתקיים כי $w(e) < w(e')$).
אזי **כל עפ"מ** של G מכיל את e.

<u>משפט 6</u>:
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, קשיר וממושקל. תהי $S \subset V, S \neq \emptyset$ קבוצת קודקודים ותהי $e \in E$ צלע **קלה** בחתך $(S, V \setminus S)$.
(לכל צלע $e' = (u', v')$ המקיימת $u' \in S$ ו- $v' \in V \setminus S$ מתקיים כי $w(e) \leq w(e')$).
אזי **קיים עפ"מ** של G המכיל את e.