טענה: באלגוריתם של דיניץ מרחקו של t מ- s ברשת השכבות גדל ממש משלב לשלב.

הוכחה: נניח כי אנו נמצאים בשלב כלשהו בריצה האלגוריתם (נתייחס אליו כאל "השלב הנוכחי"). בתחילת שלב זה אנו בונים את רשת השכבות L_f של הרשת השיורית N_f עבור הזרימה f שמצאנו עד כה. נסמן את אורך רשת השכבות בשלב הנוכחי ב- k - זהו מרחקו הנוכחי של t מ-s. לאחר שמוצאים זרימה חוסמת g ברשת השכבות אנו מוסיפים אותה לזרימה הנוכחית f ברשת. נסמן ב- f' את הזרימה ברשת בסוף השלב הנוכחי. <u>כדי להוכיח את הטענה מספיק להוכיח כי כל מסלול מ-s ל-t ברשת השיורית המעודכנת $N_{f'}$ שנבנית בסיום השלב הנוכחי הינו מאורך לפחות $k+1$</u>.

סימונים:

- לכל קודקוד v נסמן ב-$L(v)$ את מספר השכבה שלו ב-L_f. (נשים לב שכיוון שמספר השכבה של קודקוד כלשהו לא משתנה במהלך השלב, גם $L(v)$ לא משתנה)
- נאמר כי הקשת (u,v) "מגדילה את מספר השכבה L" ב- $L(v)-L(u)$.
- נאמר כי קשת (u,v) הינה "קשת קופצת" אם היא מגדילה את L ב-2 או יותר (כלומר $L(v)\geq L(u)+2$).

תחילה נביט ברשת $N_{f'}$:

למה: אין קשתות קופצות ברשת השיורית $N_{f'}$.

הוכחת הלמה: ברשת השיורית $N_{f'}$ ישנן שני סוגים של קשתות: קשתות ישנות שהיו גם ב- N_f וקשתות חדשות שהתווספו במהלך השלב הנוכחי.

- <u>קשת ישנה (u,v) מגדילה את L ב-1 לכל היותר</u>, דבר הנובע ישירות מתכונת המרחקים (קשת לא יכולה לקדם אותנו קדימה ביותר מצעד אחד). בפירוט, עבור קשת כזו ייתכנו שלושה מצבים בהתייחס למיקום קודקודיה ברשת השכבות:
  א. היא יכולה להצביע משכבה לשכבה אחריה, אז $L(v)=L(u)+1$ (קשת כזו שייכת ל- L_f)
  ב. היא יכולה להצביע משכבה לאותה השכבה, אז $L(v)=L(u)$
  ג. היא יכולה להצביע משכבה לשכבה קודמת כלשהי, אז $L(v)<L(u)$

  כלומר לכל קשת ישנה (u,v) מתקיים $L(v)\leq L(u)+1$.
- <u>קשת חדשה (u,v) מקטינה את L ב-1 בדיוק</u>. זאת כיוון שאם (u,v) קשת חדשה, אז הקשת (v,u) השתייכה למסלול בו שיפרנו את הזרימה בשלב הנוכחי ולכן (v,u) השתייכה לרשת השכבות L_f ומתקיים עבורה $L(v)-L(u)=1$ ((v,u) הגדילה את L ב-1) ולכן $L(v)-L(u)=-1$.

קיבלנו כי גם קשתות ישנות וגם קשתות חדשות לא מגדילות את L ביותר מ-1 ולכן אין קשתות קופצות ב-$N_{f'}$. (סוף הוכחת הלמה)

<u>נחזור להוכחת הטענה ונביט כעת במסלול כלשהו P מ-s ל-t ברשת $N_{f'}$:</u>

נשים לב כי כל הקשתות של P יחד מגדילות את מספר השכבה L מ-$L(s)=0$ ל-$L(t)=k$. מהלמה אין קשתות קופצות ב-$N_{f'}$ (ולכן גם ב-P אין קשתות קופצות). לכן כל קשת ב-P מגדילה את L ב-1 לכל היותר. מכאן נובע כי האפשרות היחידה להגיע מ-0 ל-k הינה ב-k צעדים לפחות. כלומר אורכו של P הינו k או יותר.

נניח בשלילה כי אורכו של P הינו בדיוק k: הדבר מתאפשר רק אם כל קשת ב-P מגדילה את L ב-1 בדיוק, כלומר אם כל קשתות P ישנות והשתייכו לרשת השכבות L_f (מקרה א' בלמה) ולכן P מוכל ברשת השכבות L_f.

לא ייתכן כי P מוכל ברשת השכבות L_f כיוון שבנקודה זו כל מסלול ב-L_f הינו מסלול רווי כתוצאה מהזרמת הזרימה החוסמת g ולפחות אחת הצלעות בו הורוותה ונעלמה כאשר בנינו את $N_{f'}$.

סתירה. קיבלנו כי אורכו של P הינו $k+1$ לפחות, כנדרש. ■

נספח מרחיב:

טענה: אם ב-P קיימת קשת חדשה (v,u) אזי אורכו הינו לפחות $k+2$

הוכחה: תהי (u,v) קשת חדשה ב-P ונסמן את המסלול P ב-N_f,-ב כך:

$$P=\langle s=v_0,v_1,v_2,\dots,u,v,\dots,t\rangle$$

נסמן את מספרי השכבה המתאימים לקודקודים על פי סדר הופעתם במסלול. הם המתחילים ב-0 ומסתיימים ב-k:

$$L(s)=0,L(v_1),L(v_2),\dots,L(u)=i+1,L(v)=i,\dots,L(t)=k$$

כל קשת ברישא מ-s עד u אינה קשת קופצת ולכן לא יכולה להגדיל את L ביותר מ-1. לכן אורך הרישא הנ"ל לא יורד מ-$i+1$.

הקשת (u,v) מוסיפה 1 לחישוב אורך המסלול.

כיוון ש-(u,v) קשת חדשה, היא מקטינה את L ב-1 ($L(v)-L(u)=-1$) ולכן מספר השכבה של v הינו i.

כל קשת בסיפא מ-v ל-t אינה קשת קופצת ולכן לא יכולה להגדיל את L ביותר מ-1. לכן אורך הסיפא מ-v ל-t לא יורד מ- $k-i$.

בסך הכל אורכו של P לא יורד מ- $(i+1)+(1)+(k-i)=k+2$. ■