שאלה 1

סעיף א':

ניתוח מקרים:

מקרה הבסיס $OPT(s)=0$ הינו נכון מתוך הגדרה ולכן נסתכל על המקרה שבו $v \in V\backslash\{s\}$.
נגדיר $Sol = \{P \mid G$ הינו sv-מסלול פשוט ב- $P\}$.
בנוסף, עבור צלע $e=(u,v)$ נגדיר $S_e = \{P|e \in E(P)$ וגם G הינו sv-מסלול פשוט ב- $P\}$
כאשר $E(P)$ היא קבוצת הצלעות במסלול P.

תת- הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים:

אם P הינו sv-מסלול פשוט ב- G ו- $(u,v) \in E(P)$ אזי $P \in S_e$.
לכן, נובע כי $Sol = \bigcup_{\substack{u \in V \\ (u,v)\in E}} S_{(u,v)}$.

מסקנה לצורת נוסחת הרקורסיה:

$$OPT(v) = \min\{O^*(S_{e_1}),\dots,O^*(S_{e_k})\}$$

כאשר:

- e_i - צלע מהצורה (u,v) ו- $\{e_1,\dots,e_k\}$ אלו כל הצלעות מצורה זו.
- $O^*(S_e)$ - הינו משקל של מסלול קל ביותר ב – S_e.

ניתוח האופטימום של כל קבוצה:

מספיק להראות את הטענה הבאה:
טענה: אם $e=(u,v) \in E$, אזי $O^*(S_e) = w(u,v) + OPT(u)$
הוכחה:
כיוון $\geq$:
יהי $P \in S_e$ בעל משקל $O^*(S_e)$, ויהי $P' = P\backslash\{e\}$. היות ו- P מסלול פשוט אזי P' מסלול פשוט.
בנוסף P' הינו su-מסלול ב-G. ולכן $w(P') \geq OPT(u)$.
מכאן נובע כי: $O^*(S_e) = w(u,v) + OPT(P') \geq w(u,v) + OPT(u)$.

כיוון$\leq$:
יהי P su-מסלול פשוט ב-G בעל משקל $OPT(u)$. היות ו- G הינו חסר מעגלים $v \in V(P)$, כאשר $V(P)$ קבוצת קודקודי P. אם כך, הוספת e ל-P מגדירה sv-מסלול פשוט, P', ב-G.
היות ו-$P' \in S_e$, נובע כי
$$OPT(u) + w(u,v) = w(P) + w(u,v) = w(P') \geq O^*(S_e)$$

<u>סעיף ב'</u>

<u>אלגוריתם איטרטיבי:</u>

1. יהי $\langle s = v_1, v_2, .., v_n \rangle$ מיון טופולוגי של G כאשר $n = |V|$.
2. אתחל את M להיות מערך בגודל n. כך ש - $M(1) = 0$ ו - $M(i) = \infty$ לכל $i > 1$.
3. סרוק את V לפי סדר המיון החל מ - v_2 ובצע:
   a. יהי v_i הקודקוד שנשקל כעת.
   b. קבע: $M(i) = min\{w(v_j, v_i) + M(j) \ | \ (v_j, v_i) \in E \ , \ j < i\}$.
4. החזר את M.

<u>זמן ריצה:</u>

<u>טענה</u>: זמן הריצה של האלגוריתם לעיל הינו $O(|V| + |E|)$.
<u>הוכחה</u>:
1. שלב 1 ניתן לביצוע ב- $O(|V| + |E|)$ על ידי שימוש ב – DFS (ראו קורס מבני נתונים). ההנחה של – s אין צלעות נכנסות מעידה שקיים מיון טופולוגי בו s הינו מקור (ראשון במיון). אם המיון החזיר קודקוד מקור אחר, אז ניתן ל"הזיז" את s כך שיהיה מקור המיון. מיון שכזה ניתן לחישוב בזמן $O(|V| + |E|)$.
2. מילוי המערך M דורש כמות קבועה של סריקות על כל צלעות הגרף - $O(|E|)$.

<u>חישוב נכון של המערך M:</u>

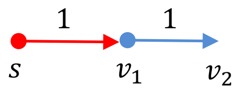
היות ואנחנו שוקלים קודקודים לפי סדר של מיון טופולוגי, בעת שקילת קודקוד v, $M(u)$ כבר חושב עבור כל קודקוד u שלפני קודקוד v במיון. היות וכל קודקוד u שעבורו $(u, v) \in E$ לפני קודקוד v, קל להוכיח באינדוקציה כי לכל i, $M(i) = OPT(v_i)$.

<u>סעיף ג'</u>

1. יהי $\langle s = v_1, v_2, .., v_n \rangle$ מיון טופולוגי של G כאשר $n = |V|$.
2. (אתחול)
   a. M - מערך בגודל n. $M(1) = 0$ ו - $M(i) = \infty$ לכל $i > 1$.
   b. π - מערך בגודל n. $\pi(i) = nil$ לכל i.
3. סרוק את V לפי סדר המיון החל מ - v_2 ובצע:
   - יהי v_i הקודקוד שנשקל כעת
   a. קבע: $M(i) = min\{w(v_j, v_i) + M(j) \ | \ (v_j, v_i) \in E \ , \ j < i\}$.
   b. יהי v_j, $j < i$, $(v_j, v_i) \in E$ כך ש- $M(i) = w(v_j, v_i) + M(j)$,
      i. קבע: $\pi(i) = j$.
4. החזר $\{(v_{\pi(i)}, v_i) \ | \ 1 < i\}$.

<u>סעיף ד'</u>

<u>ד' 1:</u>



$OPT(v_2) = \infty$ אך לפי הנוסחה $OPT(v_2) = 2$.

<u>ד' 2:</u>

נסו להוכיח לפי המסגרת.

שאלה 2

<u>סעיף א'</u>

$P = \{1,2,3,15,16,17\}$ $\qquad$ $H = \{1,14,20\}$

פתרון חמדני: $|1-1| + |2-14| + |3-20| = 0 + 12 + 17 = 29$

פתרון טוב יותר: $|1-1| + |15-14| + |17-20| = 0 + 1 + 3 = 4$

<u>סעיף ב'</u>

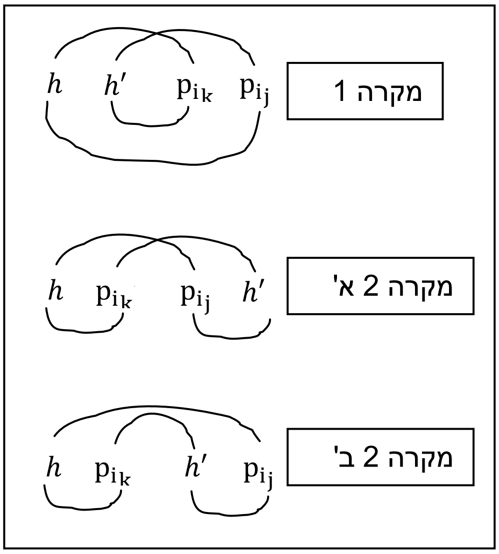
נגדיר $M' = \{i_1, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_n\}$.

M מגדיר סכום הפרשים מוחלטים מהצורה:

$d(M) = s + |h - p_{i_j}| + |h' - p_{i_k}|$, כאשר $h \leq h'$ ו- s הינו סכום שאר האיברים.

הסכום שמוגדר לפי M' הינו $d(M') = s + |h - p_{i_k}| + |h' - p_{i_j}|$ ולכן מספיק להראות כי

$|h - p_{i_k}| + |h' - p_{i_j}| \leq |h - p_{i_j}| + |h' - p_{i_k}|$.



נגדיר

- $L_{M'} = |h - p_{i_k}| + |h' - p_{i_j}|$
- $L_M = |h - p_{i_j}| + |h' - p_{i_k}|$

יהיו I_P ו - I_H האינטרוולים $\left[p_{i_k}, p_{i_j}\right]$ ו - $[h, h']$ בהתאמה.

נשקול שני מקרים:

1. $I_P \cap I_H = \phi$.
2. $I_P \cap I_H \neq \phi$.

<u>מקרה 1</u>: אם $I_P \cap I_H = \phi$ אזי מסימטריה מספיק לשקול את המקרה בו $h' \leq p_{i_k}$. במקרה זה:

$$L_M = |h - h'| + \left|p_{i_j} - p_{i_k}\right| + 2\left|p_{i_k} - h'\right| = L_{M'}$$

<u>מקרה 2</u>: נשקול שני מקרים:

<u>2א</u>: אחד האינטרוולים מוכל בשני, בלי הגבלת הכלליות $I_P \subseteq I_H$.

<u>2ב</u>: האינטרוולים נחתכים אך אף אינטרוול לא מוכל במשנהו.

<u>מקרה 2א</u>: $L_M = \left|p_{i_k} - h\right| + 2\left|p_{i_j} - p_{i_k}\right| + \left|h' - p_{i_j}\right| = L_{M'} + 2\left|p_{i_j} - p_{i_k}\right|$

<u>מקרה 2ב</u>: נניח בלי הגבלת הכלליות כי $h \leq P_{i_k} \leq h' \leq P_{i_j}$, במקרה זה:

$L_M = \left|p_{i_k} - h\right| + 2\left|h' - p_{i_k}\right| + \left|p_{i_j} - h'\right| = L_{M'} + 2\left|h' - p_{i_k}\right|$.

<u>סעיף ג'</u>

יהי $M = \{i_1, \dots, i_n\}$ פתרון אופטימאלי כך ש $p_{i_1} \le p_{i_2} \le \dots \le p_{i_l}$ עבור $1 \le l < n$ כלשהו.

יהיו $l \le j < k \le n$ <u>מינימאליים</u> כך ש: $P_{i_k} < P_{i_j}$. לפי סעיף ב'
$M' = \{i_1, \dots, i_l, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_n\}$ פתרון אופטימאלי. ממינימאליות k ו – j נובע שהאיברים של P המתאמים והאינדקסים $\{i_1, \dots, i_l, \dots, i_k\}$ מגדירים סדרה ממוינת לא יורדת. מכאן נובע כי M ניתן לשינוי באופן אינדוקטיבי לפתרון עם התכונה הרצויה לפי הצעה לעיל.

הערה כללית:

בכל הסעיפים הבאים $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ ממוינת בסדר עולה. פתרונות שאנו נדון בהם הם אינדקסים לפי סדר המיון כאשר ברור שקל להמיר לאחר מכן אינדקסים אלו לאינדקסים שמתאימים לסידור הראשוני של P.

<u>סעיף ד'</u>

<u>הגדרת תתי הבעיות ו – OPT.</u>

נגדיר $OPT(i,j)$ להיות ערך של פתרון אופטימאלי עבור $H^j = \{h_1, \dots, h_j\}$, $P^i = \{p_1, \dots, p_i\}$.   אנו מעוניינים ב – $OPT(m,\mathrm{n})$.

<u>סעיף ה'</u>

<u>טענה(:מבנה של פתרון אופטימאלי)</u>

עבור $0 \le i \le m$ ו - $0 \le j \le n$ 1. אם $i < j$, $OPT(i,j) = \infty$ 2. אחרת, אם $i \ge j$ אזי   a. $OPT(i,0) = 0$ לכל i.   b. אם $j > 0$ $OPT(i,j) = min\{OPT(i-1,j), \lvert p_i - h_j \rvert + OPT(i-1,j-1)\}$

<u>סעיף ו'</u>

<u>ניתוח מקרים:</u>

נדון רק במקרה ש - $i \ge j$ וגם - $j \ge 0$. שאר המקרים הם מקרי בסיס פשוטים.   נסמן ב- Sol את אוסף כל הפתרונות האפשריים עבור P^i ו - H^j.   בנוסף נגדיר $Sol_1 \subseteq Sol$ – כל הפתרונות שבהם האינדקס i לא מופיע. $Sol_2 \subseteq Sol$ – כל הפתרונות שבהם האינדקס i מופיע.

<u>תת- הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים:</u>

Sol_1 ו - Sol_2 במקרה זה הינם חלוקה של Sol.

<u>מסקנה לצורת נוסחת הרקורסיה:</u>

$$OPT(i,j) = \min\{O^*(Sol_1), O^*(Sol_2)\}$$

כאשר:

- $O^*(Sol_i)$ הינו ערך של פתרון אופטימאלי ב - Sol_i עבור $i \in \{1,2\}$

<u>ניתוח האופטימום של כל קבוצה:</u>

<u>פתרון אופטימי ב - Sol_1:</u>

<u>טענה:</u> $O^*(Sol_1) = OPT(i-1,j)$.

<u>הוכחה:</u>

כיוון $\geq$ יהי $M \in Sol_1$ כך ש $d(M) = O^*(Sol_1)$ – היות ו - $i \notin M$, M הינו פתרון אפשרי עבור P^{i-1} ו - H^j. ולכן $O^*(Sol_1) = d(M) \geq OPT(i-1,j)$

כיוון $\leq$: יהי M פתרון עבור P^{i-1} ו – H^j כך ש – $d(M) = OPT(i-1,j)$. היות ו - $i \notin M$, $M \in Sol_1$ ולכן $O^*(Sol_1) \leq d(M) = OPT(i-1,j)$.

<u>פתרון אופטימי ב - Sol_2:</u>

<u>טענה:</u> $O^*(Sol_2) = |p_i - h_j| + OPT(i-1,j-1)$.

<u>הוכחה:</u>

כיוון$\geq$: יהי $M \in Sol_2$ כך ש – $d(M) = O^*(Sol_2)$. לפי סעיף ב' מותר להניח שמתקיים כי $d(M) = |p_i - h_j| + s$ כאשר s הוא סכום שאר האיברים.

אם כך, $M' = M\backslash\{i\}$ הינו פתרון אפשרי עבור P^{i-1} ו - H^j. מכאן נובע כי

$$O^*(Sol_2) = d(M) = |p_i - h_j| + d(M') \geq |p_i - h_j| + OPT(i-1,j-1)$$

כיוון $\leq$: יהי M פתרון עבור P^{i-1} ו – H^j כך ש – $d(M) = OPT(i-1,j-1)$.

נגדיר $M' = M \cup \{i\}$ כך ש: $d(M') = |p_i - h_j| + d(M)$.

אם כך $M' \in Sol_2$. מכאן נובע כי

$$|p_i - h_j| + OPT(i-1,j-1) = |p_i - h_j| + d(M) = d(M') \geq O^*(Sol_2)$$

<u>סעיף ז'</u>

<u>אלגוריתם איטרטיבי:</u>

1. מיין את P בסדר עולה.
2. יהי M מערך בגודל $(m+1)x(n+1)$ ואתחל:
   a. $M[i,j] = \infty$ אם $i < j$.
   b. $M[i,0] = 0$ לכל i.
3. עבור $i \leftarrow 1$ עד m
   a. עבור $j \leftarrow 1$ עד n בצע:
      i. אם $i \geq j$
$$M[i,j] = min\{M[i-1,j], |p_i - h_j| + OPT(i-1,j-1)\}$$
4. החזר $M[m,n]$

<u>זמן ריצה:</u>

<u>טענה:</u> האלגוריתם לעיל דורש $O(max\{mn, mlogm\})$.

<u>הוכחה:</u> מיון P דורש $O(mlogm)$

מילוי M דורש מילוי של $O(mn)$ תאים, כל אחד ב - $O(1)$.

שאלה 3

סעיף א'

$b_2 = 1$,$b_1 = 2$, $a_2 = 10$,$a_1 = 10^6$, $d_2 = 30$,$d_1 = 20$, $I_A = I_B = 25$

לפי החמדן: $\{(x_1 = 20, y_1 = 0), (x_2 = 5, y_2 = 25)\}$ העלות הינה $2 \cdot 10^6 + 25 + 50$.

יותר טוב: $\{(x_1 = 0, y_1 = 20), (x_2 = 25, y_2 = 5)\}$ העלות הינה $10 + 5 + 250$.

סעיף ב'

הגדרת תתי הבעיות ו – OPT.

נגדיר $OPT(i, T)$ כעלות של פתרון אופטימאלי עבור יעדים $\{D_1, \dots, D_i\}$ כאשר במחסן A ישנם T כדורים. אנו מעוניינים ב – $OPT(n, I_A)$.

סעיף ג'

טענה) מבנה של פתרון אופטימאלי:(

עבור $0 \le i \le n$ ו- $0 \le T \le I_A$

$$OPT(i,T) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \min\{OPT(i-1, T-j) + a_i j + b_i(d_i - j)\} & \max\{0, I_B - \sum_{k=1}^{i} d_k - (T-j)\} \le j \le \min\{T, d_i\} \end{cases}$$

סעיף ד'

ניתוח מקרים:

נסמן ב- Sol את אוסף כל הפתרונות האפשריים עבור יעדים $\{D_1, \dots, D_i\}$ עם דרישות $\{d_1, \dots, d_i\}$ כאשר במחסן A ישנם T כדורים ובמחסן B ישנם $\sum_{k=1}^{i} d_k - T$ כדורים.
עבור $0 \le j \le \min\{T, d_i\}$ נגדיר $Sol_j \subseteq Sol$ כאוסף כל הפתרונות למופע לעיל שבו A מספק j כדורים ל-D_i (ולכן B מספק $d_i - j$ כדורים).

תת- הקבוצות הנ"ל מכסות את קבוצת כל הפתרונות האפשריים:

כל פתרון ב – Sol, A מספק $0 \le j \le \min\{T, d_i\}$ כדורים ל - D_i עבור j בתחום לעיל.

מסקנה לצורת נוסחת הרקורסיה:

$$OPT(i,T) = \min\{O^*(Sol_0), O^*(Sol_1), \dots, O^*(Sol_k)\}$$

כאשר:

- $O^*(Sol_j)$ הינו ערך של פתרון אופטימאלי ב - Sol_j.
- $k = \min\{T, d_i\}$

ניתוח האופטימום של כל קבוצה:

מספיק להראות את הטענה הבאה:
טענה: יהי $0 \le j \le \min\{T, d_i\}$, אזי $O^*(Sol_j) = OPT(i-1, T-j) + a_i j + b_i(d_i - j)$
הוכחה:
כיוון $\ge$: יהי $P \in Sol_j$ בעל ערך $O^*(Sol_j)$.
כלומר $P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_{i-1}, y_{j-1}), (j, d_i - j)\}$.
נסמן $P' = \{(x_1, y_1), \dots, (x_{i-1}, y_{j-1})\}$.
P' הוא פתרון אפשרי עבור $\{D_1, \dots, D_{i-1}\}$ כאשר ב-A , $T - j$ כדורים ו-B $\sum_{k=1}^{i-1} d_k - (T - j)$ כדורים. לכן ערכו של P' גדול שווה $OPT(i-1, T-j)$ ולכן
$O^*(Sol_j) \ge OPT(i-1, T-j) + a_i j + b_i(d_i - j)$

כיוון $\le$: יהי P פתרון אופטימאלי עבור היעדים $\{D_1, \dots, D_{i-1}\}$ כאשר ב-A , $T - j$ כדורים ו-B $\sum_{k=1}^{i-1} d_k - (T - j)$ כדורים.
נגדיר P פתרון אפשרי ליעדים $\{D_1, \dots, D_i\}$ כאשר ב-A , T כדורים ו-B $\sum_{k=1}^{i-1} d_k - T$ כדורים כך ש-A מספק ל- D_i , j כדורים ו-B מספק $d_i - j$ כדורים. אם כך, $P \in Sol_j$ ומתקיים $O^*(Sol_j) \le OPT(i-1, T-j) + a_i j + b_i(d_i - j)$.

סעיף ה'

אלגוריתם איטרטיבי:

1. בה"כ $I_A \le I_B$.
   יהי M מערך בגודל $(n+1)x(I_A+1)$ ונקבע $M[0,T] = 0$ לכל $0 \le T \le I_A$.
2. עבור $i \leftarrow 1$ עד n
   a. עבור $T \leftarrow 0$ עד I_A בצע:
      i. $M[\text{i,T}]=\min\{M[\text{i-1,T-j}] \mid 0 \le j \le \min\{T, d_i\}\}$
3. החזר $M[\text{n},I_A]$

זמן ריצה:

נניח בה"כ כי $I_A \le I_B$.
טענה: האלגוריתם לעיל דורש $O({I_A}^2 n)$.
הוכחה: ישנם $O(I_A n)$ תאים ב – M, כל תא דורש $O(I_A)$ זמן חישוב.

שאלה 4

נוכיח באינדוקציה על האיטרציות ש- Dijkstra מבצע.

לפני תחילת האיטרציה הראשונה הטענה נכונה.

נניח נכונות עד תחילת האיטרציה ה – i ונראה כי הטענה נשמרת במהלך האיטרציה ה – i.

נסמן:

- S – קבוצת הקודקודים שנחשפו עד תחילת האיטרציה ה – i.
- v – קודקוד שמוכנס ל - S במהלך האיטרציה ה – i.
- N – קבוצת קודקודים כך ש - $\{u \mid (v,u) \in E, u \notin S\}$.

מספיק להראות את הישמרות הטענה עבור קודקודים ב – N שעבורם ערך d משתנה בעקבות ביצוע $Relax$ על צלע (v,u). יהי $u \in N$ קודקוד כנ"ל. נראה שבתחילת איטרציה ה – $i+1$, א' + ב' מתקיימים עבור הקודקוד u.

א. לפי הנחת האינדוקציה ישנו sv-מסלול שנסמנו ב - P (s – קודקוד המקור ממנו מורץ האלגוריתם) במשקל $d(v)$ שכל קודקודיו פרט ל – v שייכים ל – S.
המסלול $P' = P \cup \{(v,u)\}$ הינו בעל משקל $d(u) = w(v,u) + d(v)$, שכן על הקשת (v,u) בוצע $Relax$ ששינה את $d(u)$ לערך זה. בנוסף, כל קודקודי P' פרט ל – u שייכים ל - $S \cup \{v\}$. בתחילת האיטרציה ה – $i+1$, הקבוצה $S \cup \{v\}$ היא קבוצת הקודקודים שנחשפו.

ב. נגדיר:
- P – sv-מסלול קל ביותר שכל קודקודיו פרט ל – v שייכים ל- S
$w(P) = d(v)$ לפי הנחת האינדוקציה.
- P' – המסלול $P' = P \cup \{(v,u)\}$ הינו בעל משקל $d(u) = w(v,u) + d(v)$,
- y – ערך של $d(u)$ לפני ביצוע ה-$Relax$ על הקשת (v,u).

נניח בשלילה כי P' איננו su-מסלול קל ביותר שכל קודקודיו פרט ל – u שייכים ל - $S \cup \{v\}$.
יהי P'' מסלול בעל אופי כשל P' כך ש $w(P'') < w(P')$.

ב - P'' ישנה צלע (x,u), כך ש- $x \in S$ (ולכן $x \neq v$). לפי הנחת האינדוקציה

$w(P'') = w(x,u) + d(x)$ ובנוסף לפי הנחת האינדוקציה ניתן לבחור P'' כנ"ל כך ש – v אינה שייכת ל - P''. היות ו – v לא שייכת ל - P'', אזי מתקיים:

$$w(P') = d(u) = d(v) + w(v,u) < y \leq w(x,u) + d(x) = w(P'')$$

וזו סתירה.