עבודת בית 3 בתכנון אלגוריתמים

תאריך הגשה , 22.4.2010 :בשעה 12:00 בצהריים ,תא מספר 68 בקומת כניסה של בניין37.
הערה: כל עוד לא נאמר אחרת, הביטוי "תארו אלגוריתם" דורש:

- ניסוח אלגוריתם.
- הוכחת נכונות.
- ניתוח זמן ריצה וביאור כל ענייני המימוש.

שאלה 1

בעיית מסלול קל ביותר בגרף מכוון חסר מעגלים:

<u>מופע:</u> גרף **מכוון** חסר מעגלים $G=(V,E)$ ממושקל על צלעותיו לפי פונקציה w (ייתכנו משקלים שליליים) וקודקוד $s \in V$. ניתן להניח כי ל s אין צלעות נכנסות.
<u>יש למצוא:</u> עץ מסלולים זולים ביותר מ s ב G.

סעיף א: עבור קודקוד $v \in V$ נגדיר $OPT(v)$ כמשקל מסלול קל ביותר מ s ל v ב G או אינסוף אם לא קיים כזה. אזי:

1. $OPT(s)=0$.
2. $OPT(v)=\min\{w(u,v)+OPT(u):(u,v)\in E\}$

הוכיחו את נכונות הנוסחה. חובה להשתמש במסגרת שהוצגה בכיתה.

סעיף ב: נסחו (ללא הוכחת נכונות) אלגוריתם איטראטיבי מבוסס תכנון דינאמי בעל זמן ריצה של $O(|V|+|E|)$ שמחזיר מערך M בגודל $|V|$ כך ש $M(v)=OPT(v)$ לכל $v \in V$. יש להוכיח את טענותיכם לגבי זמן הריצה **ולהסביר מדוע כאשר מחושב ערך** $OPT(v)$ **עבור קודקוד** $v \in V$ **כל הערכים הנדרשים לשם החישוב חושבו כבר וחושבו נכון.**

סעיף ג: נסחו (ללא הוכחת נכונות) אלגוריתם הפועל ב $O(|V|+|E|)$ ומחזיר עץ מסלולים זולים ביותר מ s ב G.

בעיית המסלול המונוכרומטי הקל ביותר בגרף מכוון חסר מעגלים:

<u>מופע:</u> גרף **מכוון** חסר מעגלים $G=(V,E)$ לפי פונקציה w, קודקוד $s \in V$, וחלוקה $E=E_B \cup E_R$ (צלעות ב E_B נקראות כחולות וב E_R אדומות). ניתן להניח כי ל s אין צלעות נכנסות.
<u>פתרון חוקי:</u> מסלול פשוט ב G שיוצא מ s שכל צלעותיו שייכות לבדיוק אחת מן הקבוצות E_B, E_R. מסלול שכזה יקרא **מונוכרומטי.**
<u>יש למצוא:</u> מערך M בגודל $|V|$ כך שלכל $v \in V$, $M(v)$ שווה למשקל מסלול מונוכרומטי קל ביותר מ s ל v ב G.

סעיף ד (מתייחס לבעיית המסלול המונוכרומטי): עבור קודקוד $v \in V$ נגדיר $OPT(v)$ כמשקל מסלול מונוכרומטי קל ביותר מ s ל v ב G. אזי:

1. $OPT(s)=0$.
2. $OPT(v)=\min\{w(u,v)+OPT(u):(u,v)\in E\}$

ד.1: הראו כי הנוסחה לעיל שגויה על ידי דוגמא נגדית.
ד.2: תארו במדויק היכן נכשלת הוכחת הנוסחה לעיל. בתשובתכם התייחסו למסגרת ההוכחה שסופקה בכיתה.

סעיף ה (לא להגשה):
תארו אלגוריתם מבוסס רדוקציה הפועל ב $O(|V|+|E|)$ עבור בעיית המסלול המונוכרומטי הקל ביותר.

שאלה 2

<u>מופע:</u> זוג סדרות של מספרים שלמים חיוביים: $P=\{p_1,...,p_m\}$ ו $H=\{h_1,...,h_n\}$ כך ש $n\leq m$.
ניתן להניח ש H ממוינת בסדר עולה.
<u>פתרון חוקי:</u> סדרה $\{i_1,i_2,...,i_n\}\subseteq[1,m]$ של אינדקסים של איברים ב P.
<u>יש למצוא:</u> פתרון חוקי $M=\{i_1,i_2,...,i_n\}$ כך ש $d(M)=\sum_{k=1}^{n}|p_{i_k}-h_k|$ מינימאלי.

סעיף א: הראו כי האלגוריתם החמדן הבא נכשל:

1. מיין את P בסדר עולה.
2. החזר $\{i_1,i_2,...,i_n\}$ האינדקסים של איברי P שמתאימים ל n האיברים הראשונים לפי המיון.

סעיף ב: הוכיחו:
יהי $M=\{i_1,i_2,...,i_n\}$ פתרון אופטימאלי ויהיו $1\leq j<k\leq n$ כך ש $p_{i_k}<p_{i_j}$.
אזי $\{i_1,...,i_k,...,i_j,...,i_n\}$ הינו פתרון אופטימאלי.

סעיף ג: הוכיחו כי קיים פתרון אופטימאלי $\{i_1,i_2,...,i_n\}$ בעל התכונה: $p_{i_1}\leq p_{i_2}\leq...\leq p_{i_n}$.

סעיף ד: הגדירו תת-בעיה אופיינית. כלומר הגדירו $OPT(i,j)$ כאשר i מייצג את P ו j את H. ציינו איזה ערך אנו מעוניינים לחשב.

סעיף ה: נסחו נוסחת נסיגה ותנאי בסיס עבור ערך של פתרון אופטימאלי עבור הבעיה לעיל.
<u>הדרכה:</u> עבור $OPT(i,j)$ שהגדרתם שקלו שני מקרים: $i\geq j$, ו $i<j$.

סעיף ו: הוכיחו את נכונות הנוסחה שהגדרתם בסעיף ה'. חובה להשתמש במסגרת שהוצגה בכיתה.

סעיף ז: נסחו (ללא הוכחת נכונות) אלגוריתם איטראטיבי מבוסס תכנון דינאמי לחישוב ערך של פתרון אופטימאלי בעל זמן ריצה של $O(\max\{mn,m\log m\})$. יש להוכיח את טענותיכם לגבי זמן הריצה.

שאלה 3

<u>מופע:</u> יהיו A ו B זוג מחסנים שבהם I_A ו I_B כדורים, בהתאמה.

בנוסף, ישנם n יעדי משלוח D_i, $1 \le i \le n$, כך שביעד D_i ישנה דרישה ל d_i כדורים,

ומתקיים $I_A + I_B = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

עלות משלוח של כדור אחד מ A ל D_i הינה a_i עבור $1 \le i \le n$.

עלות משלוח של כדור אחד מ B ל D_i הינה b_i עבור $1 \le i \le n$.

<u>פתרון חוקי:</u> n זוגות של מספרים שלמים (x_i, y_i), $1 \le i \le n$, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. $d_i = x_i + y_i$ לכל $1 \le i \le n$.
2. $I_A = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
3. $I_B = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

<u>פתרון אופטימאלי:</u> פתרון חוקי $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ בעל עלות $\sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + b_i y_i)$ מינימאלית.

סעיף א: הראו כי האלגוריתם החמדן הבא נכשל:

1. מיין את הדרישות $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ בסדר לא עולה.
2. $i_A \leftarrow I_A$, $i_B \leftarrow I_B$.
3. סרוק את הדרישות לפי סדר המיון ובצע:
   a. יהי d_i הערך שנשקל עתה.
   b. יהי j^* מספר שלם כך ש:

$$a_i j^* + b_i (d_i - j^*) = \min\{a_i j + b_i (d_i - j) : 0 \le j \le \min\{d_i, i_A\}, d_i - j \le i_B\}$$

   c. ספק ל D_i: j^* כדורים מ A ו $d_i - j^*$ כדורים מ B.
   d. עדכן: $i_A = i_A - j^*$ ו $i_B = i_B - (d_i - j^*)$.

סעיף ב: הגדירו תת-בעיה אופיינית בלשון OPT עבור הבעיה לעיל. ציינו איזה ערך אנו מעוניינים לחשב. בעת ההגדרה **שימו לב לזמן הריצה הנדרש בסעיף ה'.**

סעיף ג: נסחו נוסחת נסיגה ותנאי בסיס עבור עלות של פתרון אופטימאלי עבור הבעיה לעיל.

סעיף ד: הוכיחו את נכונות הנוסחה שהגדרתם בסעיף ג'. חובה להשתמש במסגרת שהוצגה בכיתה.

סעיף ה: נסחו (ללא הוכחת נכונות) אלגוריתם איטראטיבי מבוסס תכנון דינאמי לבעיה לעיל בעל זמן ריצה של $O((\min\{I_A, I_B\})^2 n)$. יש להוכיח את טענותיכם לגבי זמן הריצה.

הערה: האלגוריתם שמתוכנן בשאלה זו איננו פולינומיאלי בגודל הקלט. ישנו אלגוריתם פולינומיאלי לבעיה המבוסס על ידע שקשור במושג **זרימה** שילמד בהמשך הקורס. נציין כי גם החומר שנלמד בהמשך הקורס על זרימה לא יהיה מספיק לשם תכנון האלגוריתם.

<u>שאלה 4</u>

נסמן ב S את קבוצת הקודקודים שאלגוריתם Dijkstra חושף במהלך ריצתו כך שעבור קודקוד v שמוכנס ל S ערך $d(v)$ לא משתנה יותר.

הוכיחו:

בתחילת כל איטראציה (של הלולאה המרכזית של Dijkstra) לכל קודקוד $x \in V$ כך ש- $d(x) \neq \infty$ מתקיים:

א. קיים מסלול מ s ל x במשקל $d(x)$ שכל הקודקודים בו (פרט אולי ל x) שייכים ל S.

ב. הערך $d(x)$ הינו משקל של מסלול **קל ביותר** מ s ל x שכל הקודקודים בו (פרט אולי ל x) שייכים ל S.