תכנון אלגוריתמים תרגיל 3 – תכנון דינאמי ומסלולים קצרים

תאריך הגשה: 3.06.2009

- **כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק תיאור מילולי של האלגוריתם, הוכחת נכונות וניתוח זמן ריצה.**
- **אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוניציאלי לא נחשב יעיל ולכן לא יתקבל אם לא נאמר אחרת.**
- **פתרון יש לכתוב בדף התשובות הנלווה לעבודה.**

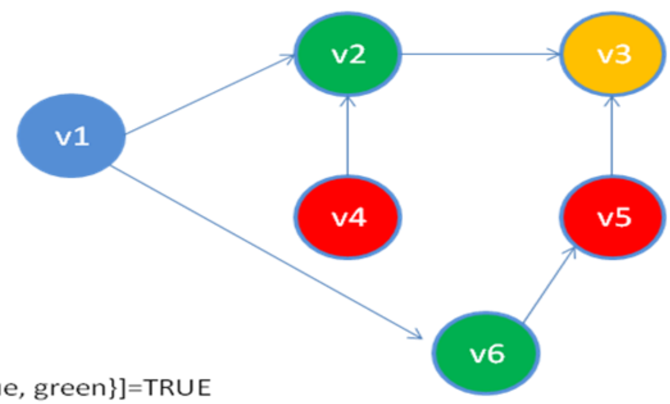
שאלה 1: בעית המסלול הססגוני

קלט: גרף $G=(V,E)$ מכוון ופונקציה $f: V \rightarrow \{1,\dots,k\}$ עבור שלם כלשהו k.

פתרון חוקי: מסלול $v_1,\dots,v_\ell$ פשוט ב-G כל שלכל $i \neq j$, $f(v_i) \neq f(v_j)$. מסלול כנ"ל יקרא מסלול ססגוני באורך ℓ.

יש למצוא: מסלול ססגוני באורך מקסימאלי (כלומר, עם מספר גדול ביותר של צמתים).

פתרו את הבעיה ע"י תכנון דינאמי. לכל $v \in V$ ולכל $T \subseteq \{1,\dots,k\}$, הגדירו משתנה $M[v,T]$ כאשר $M[v,T]=\mathrm{true}$ אם קיים מסלול ססגוני פשוט $v_1,\dots,v_\ell$ כך ש- $T=\{f(v_i): 1 \leq i \leq \ell\}$ (כלומר, קבוצת ערכי הצמתים במסלול הם בדיוק הקבוצה T) ו- $v=v_\ell$. אם לא קיים מסלול כזה אזי $M[v,T]=\mathrm{false}$. דוגמא:



M[v2,{blue, green}]=TRUE
M[v3,{blue, green, red, orange}]=TRUE
M[v5,{blue, green}]=FALSE

א. הראו נוסחה רקורסיבית לחישוב $M[v,T]$. הוכיחו את נכונות הנוסחה.

ב. הראו אלגוריתם איטרטיבי המחשב את ערכי המשתנים הנ"ל. הסבירו איך למצוא את האורך של מסלול ססגוני מקסימאלי מתוך ערכי המשתנים שחישבתם. אין צורך בהוכחת נכונות האלגוריתם.

ג. מהי סיבוכיות האלגוריתם שתיארתם? האם האלגוריתם פולינומיאלי? האם האלגוריתם פולינומיאלי כאשר $k = \log |V|$?

ד. הראו איך למצוא מסלול ססגוני באורך מקסימאלי מתוך ערכי המטריצה M.

שאלה 2: בעית הגנב, אלגוריתם אלטרנטיבי

<u>קלט:</u> n איברים. לכל איבר יש משקל w_i ומחיר p_i. משקל תרמיל W. נניח כי $w_i \leq W$ לכל $1 \leq i \leq n$.

<u>פתרון חוקי:</u> קבוצה $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, כך ש: $\sum w_i \leq W$.

<u>יש למצוא:</u> קבוצה חוקית בעלת <u>מחיר מקסימאלי</u>.

הגדרת משתנים לאלגוריתם לבעיה, ע"י תכנון דינאמי:

יהי $P = \max\{p_i\}$. נגדיר עבור $0 \leq i \leq n$ ו- $0 \leq p \leq n \cdot P$ את $\mathrm{OPT}(i,p)$ כמשקל הקטן ביותר של קבוצה המוכלת ב- $\{1, \dots, i\}$ ומחירה <u>בדיוק</u> p. אם אין קבוצה שמחירה בדיוק p, אזי $\mathrm{OPT}(i,p) = \infty$.

פתרו את הבעיה <u>בעזרת הגדרה זו של OPT</u>:

1. הראו נוסחה רקורסיבית לחישוב $\mathrm{OPT}(i,p)$. אין צורך להוכיח את נכונות הנוסחה.
2. הראו אלגוריתם בעזרת memoization (פתקאות, או שיטת התזכור) המחשב את ערכי OPT הנ"ל, וענו על הסעיפים:
   a. איך לחשב את המחיר האופטימאלי של קבוצה חוקית מערכי המשתנים שחשבתם?
   b. מהו זמן הריצה של האלגוריתם? האם האלגוריתם פולינומאלי? האם האלגוריתם פולינומאלי כאשר $P < n$?

   אין צורך בהוכחת נכונות האלגוריתם.
3. הסבירו כיצד ניתן לבדוק האם האיבר ה-n הוא בפתרון אופטימאלי.

שאלה 3: בעיית הרשימה המפרידה במטריצה

קלט: מטריצה W בגודל $n \times m$, כאשר נתייחס לכניסה $W[i,j]$, כאשר $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, כמשקל הכניסה.

פתרון חוקי: סדרה של אינדקסים $j_1, \ldots, j_n$, כך ש- $\forall i, |j_i - j_{i+1}| \le 1$. סדרה זו מגדירה את הרשימה הבאה של תאים במטריצה: $[W[1,j_1], W[2,j_2], \ldots, W[n,j_n]]$. כלומר, סדרה חוקית מגדירה רשימה המקיימת את התנאים הבאים:

1. הרשימה מתחילה בתא בשורה העליונה של המטריצה ומסתיימת בתא בשורה התחתונה שלה.
2. הרשימה כוללת תא אחד בלבד מכל שורה במטריצה.
3. המרחק בין העמודות של שני תאים עוקבים ברשימה הוא לכל היותר אחד.

יש למצוא: סדרה של אינדקסים חוקית S בעלת משקל מינימאלי, כאשר משקל של סדרת אינדקסים מוגדר להיות סכום המשקלות של כל התאים ברשימה $W(S) = \sum_{i=1}^{n} W[i, j_i]$.

לדוגמא, התאים המודגשים, הם אלו שמהווים סדרה חוקית של אינדקסים בעלת מחיר מינימאלי.

	1	2	3	4
1	5	8	5	1
2	2	3	3	10
3	7	4	8	6
4	5	2	11	10

הערה: בעיה זו היא שימושית בעיבוד תמונה.

פתרו בעיה זו ע"י תכנון דינאמי.

1. הגדירו משתנים. הסבירו מה מובן המשתנים.
2. הראו נוסחה רקורסיבית לחישוב המשתנים. הוכיחו את נכונות הנוסחה.
3. הראו אלגוריתם איטרטיבי הפותר את הבעיה. הסבירו איך מחשבים משקל מינימאלי של סדרה חוקית מתוך ערכי המשתנים שחישבתם. אין צורך בהוכחת נכונות האלגוריתם.
4. מהו זמן הריצה של האלגוריתם?
5. הראו <u>אלגוריתם</u> לשחזור פתרון לבעיה. הוכיחו שהפתרון שאלגוריתם משחזר הוא אופטימאלי.

שאלה 4: מסלולים קצרים ביותר

נזכר באלגוריתם הבא למציאת מסלול קל ביותר:

<u>קלט:</u> גרף $G = (V, E)$ מכוון עם משקלות <u>חיוביים</u> וקדקוד $s \in V$.

<u>אתחול:</u> $d[v] = \infty$ לכל $v \in V$

$d[s] = 0$

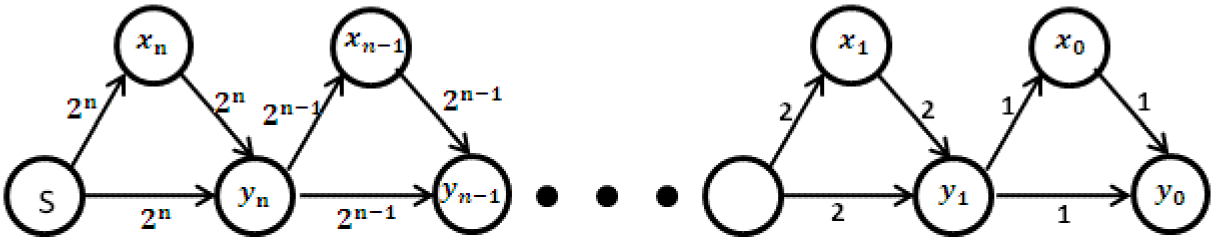
<u>צעד:</u> כל עוד קיימת קשת כך ש- $d[v] > d[u] + w(u, v)$:

בוחרים קשת $(u, v) \in E$ כנ"ל, באופן שרירותי, ומפעילים עליה Relax.

כאשר:

```
RELAX(u, v)
  if d[v] > d[u] + w(u, v) then
        d[v] ← d[u] + w(u,v)
```

1. הוכיחו שאם האלגוריתם הנ"ל עוצר, אז קיבלנו אורכי מסלולים קצרים ביותר, כלומר $d(v)$ הוא אורך מסלול קל ביותר מ- s ל- v.
2. הוכיחו שהאלגוריתם מבצע לכל היותר $O(n \cdot n!)$ פעולות Relax.
3. הראו דוגמת ריצה על הגרף הבא שבה מספר פעולות Relax הוא הוא $2^{\Omega(n)}$.



x_n
x_{n-1}
x_1
x_0
S
y_n
y_{n-1}
y_1
y_0
2^n
2^n
2^{n-1}
2^{n-1}
2^n
2^{n-1}
2
2
1
1
2
1