פתרון עבודה 3- תכנון אלגוריתמים 2009

שאלה 1:

א. **ניסוח נוסחת רקורסיה:**

מקרה בסיס: עבור $\mathrm{T} = \{\mathrm{f(v)}\}$, $M(v,T) = True$. אחרת, עבור $|T| = 1$, $M(v,T) = False$.

מקרה כללי:

- אם $\mathrm{f(v)} \in \mathrm{T}$ אזי $M(v,T) = \bigvee_{(\mathrm{v_r,v})\in\mathrm{E}} \mathrm{M}(v_\mathrm{r}, \mathrm{T} \setminus \mathrm{f(v)})$
- אחרת, $M(v,T) = False$

הוכחת נוסחת הרקורסיה:

טיפול במקרי בסיס ומקרי הקצה: אם $\mathrm{T} = \{\mathrm{f(v)}\}$, אזי $\mathrm{M(v,T)} = \mathrm{True}$. ואכן, קיים מסלול ססגוני פשוט בעל צומת אחת v_ℓ כך ש- $\mathrm{T} = \{\mathrm{f(v)}\}$ (כלומר, ערך הצומת במסלול הוא בדיוק הקבוצה T) ו- $\mathrm{v} = \mathrm{v}_\ell$. אם $f(v) \notin T$ אזי $\mathrm{M(v,T)} = \mathrm{False}$ והנוסחה נכונה.

נשקול אם כך את המקרה בו $f(v) \in T$ וגם $\mathrm{T} \neq \{\mathrm{f(v)}\}$.

צריך להוכיח $M(v,T) = True$ אמ"מ $\bigvee_{(\mathrm{v_r,v})\in\mathrm{E}} \mathrm{M}(v_\mathrm{r}, \mathrm{T} \setminus \mathrm{f(v)}) = \mathrm{True}$.

כיוון ראשון: יהיו $v \in V$, $T \subseteq \{1 \dots k\}$ כך ש $\mathrm{M(v,T)} = \mathrm{True}$. לפיכך, קיים מסלול ססגוני פשוט $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_{\ell-1}, \mathrm{v}_\ell$ כך ש- $T = \{f(v_i): 1 \le i \le \ell\}$ ו- $\mathrm{v} = \mathrm{v}_\ell$. יהי $u \in V$ כך ש $u = v_{\ell-1}$. מכאן, קיים מסלול ססגוני פשוט $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_{\ell-1}$ בעל קבוצת צבעים: $T' = \{f(v_i): 1 \le i \le \ell - 1\} = T \setminus \{f(v)\}$ ו- $u = v_{\ell-1}$. לכן, $\mathrm{M}(u, \mathrm{T}') = \mathrm{True}$. לפיכך, $\bigvee_{(\mathrm{v_r,v})\in\mathrm{E}} \mathrm{M}(v_\mathrm{r}, \mathrm{T} \setminus \mathrm{f(v)}) = \mathrm{True}$.

כיוון שני: נסמן $T' = T \setminus \{f(v)\}$. נניח כי $\bigvee_{(\mathrm{v_r,v})\in\mathrm{E}} \mathrm{M}(v_\mathrm{r}, \mathrm{T}') = \mathrm{True}$. לכן קיים v_r המקיים $\mathrm{M}(u, \mathrm{T}') = \mathrm{True}$. כלומר, קיים מסלול ססגוני פשוט $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_{\ell-1}$ כך ש- $T = \{f(v_i): 1 \le i \le \ell - 1\}$, $u = \mathrm{v}_{\ell-1}$ ו- $(u,v) \in E$. מכאן, ניתן להרחיב את המסלול למסלול ססגוני פשוט $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_{\ell-1}, \mathrm{v}_\ell$ כך ש- $v = \mathrm{v}_\ell$, בעל קבוצת צבעים T. לכן, $\mathrm{M}(v, \mathrm{T}) = \mathrm{True}$.

ב. **אלגוריתם איטרטיבי:**

נסמן $|\mathrm{V}| = \mathrm{n}$. נגדיר את M להיות מערך בגודל $\mathrm{n} \cdot 2^\mathrm{k}$. נרצה שהתא $\mathrm{M[v,T]}$ יהיה True אם קיים מסלול ססגוני פשוט $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_\ell$ כך ש- $\mathrm{T} = \{\mathrm{f}(\mathrm{v}_t): 1 \le \mathrm{t} \le \ell\}$ (כלומר, קבוצת ערכי הצמתים במסלול הם בדיוק הקבוצה T) ו- $\mathrm{v} = \mathrm{v}_\ell$, ו- $\mathrm{M[v,T]}$ יהיה False אם לא קיים מסלול כזה.

1. לולאה: לכל T, כך ש: $|T| = 1$:
   - i. לולאה: עבור $v = 1$ ועד n:
     1. אם $T = \{f(v)\}$, קבע $M[v,T] = True$.
     2. אחרת, קבע $M[v,T] = False$.
2. לולאה: לכל $i = 2$ עד k:
   - i. לולאה: לכל T, כך ש- $|T| = i$:
     1. לולאה: לכל $v \in V$:
        - a. אם $f(v) \in T$, קבע: $M[v,T] = \bigvee_{(v_r,v)\in E} M[v_r T \setminus f(v)]$
        - b. אחרת, קבע: $M[v,T] = False$.

אורך של מסלול ססגוני מקסימאלי שווה ל-$|T|$ מקסימאלי כך שבשורה ה- $|T|$ בטבלה M , קיים תא בעל ערך $True$.
מציאת האורך של מסלול ססגוני מקסימאלי מתוך ערכי המשתנים שחישבנו נעשית בצורה הבאה: אם אחד מתאי הטבלה בשורה בה $|T| = k$ שווה ל- $True$, אז המסלול הססגוני המקסימאלי הינו באורך k. אחרת, עוברים לשורה בטבלה, בה ערכי $|T| = k - 1$ ומבצעים את אותה הבדיקה. ממשיכים בתהליך (עוברים על שורות הטבלה בסדר יורד של גודל הקבוצה T) עד שמגיעים לשורה בה נמצא תא בעל ערך $True$ ואורך של מסלול ססגוני מקסימאלי יהיה שווה לגודל הקבוצה T בשורה.

ג. טענה: סיבוכיות האלגוריתם שתואר בסעיף ב' הינו $O(2^k \cdot |V|^2)$.
הסבר: מספר התאים בטבלה הם $2^k \cdot |V|$. כמו כן, בעת מילוי הטבלה, עוברים על כל השכנים של כל קודקוד, כלומר סה"כ על $|V|$ קודקודים לכל היותר. לפיכך, סיבוכיות האלגוריתם שתואר בסעיף ב' הינו $O(2^k \cdot |V|^2)$. באופן כללי, האלגוריתם אינו פולינומי כי הוא אקספוננציאלי ב-k.
נשים לב שכאשר $k = \log |V|$ האלגוריתם פולינומיאלי: $2^k \cdot |V|^2 = 2^{\log |V|} \cdot |V|^2 = O(|V|^3)$.

<u>ניתוח זמן ריצה עדין יותר:</u>
טענה: סיבוכיות האלגוריתם שתואר בסעיף ב' הינו $O(2^k \cdot |E|)$.
הוכחה: לכל גודל של הקבוצה T (שורה $2.i$ באלגוריתם), אנו עוברים על שכני כל קודקוד. במעבר זה, כל צלע נשקלת פעם אחת לכל היותר. לכן במעבר זה נשקלים לכל היותר $|E|$ ערכים. לפיכך, סיבוכיות האלגוריתם שתואר בסעיף ב' הינו $O(2^k \cdot |E|)$. נשים לב שכאשר $k = \log |V|$ האלגוריתם פולינומיאלי: $2^k \cdot |E| = 2^{\log|V|} \cdot |E| = O(|V| \cdot |E|)$.

ד. **אלגוריתם שחזור:**
1. יהי max אורך מסלול ססגוני מקסימאלי.
2. T קבוצה ו-v צומת כך ש: $|T| = max$ ו- $M[v,T] = True$. (אפשר למצוא את T,v ו- max כמתואר בסעיף ב')
3. $v_{last} \leftarrow v$.
4. $P \leftarrow v$.
5. <u>לולאה</u>: עבור $i \leftarrow (max - 1)$ ועד 1 בצע:
   6.1. $T \leftarrow T \setminus \{f(v_{last})\}$
   6.2. מצא u כך ש: $M[u,T] = True$ ו- $(u,v) \in E$.
      6.2.1. $v_{last} \leftarrow u$.
      6.2.2. $P \leftarrow u, P$.
6. החזר: P

<u>שאלה 2:</u>

א. **ניסוח נוסחת רקורסיה:**

<u>מקרי בסיס:</u>

- $OPT(0,0) = 0$
- עבור $1 \le p \le n \cdot P$, $OPT(0,p) = \infty$

<u>מקרה כללי:</u>

$$OPT(i,p) = \begin{cases} OPT(i-1,p) & \text{if } p < p_i \\ MIN(OPT(i-1,p-p_i) + w_i, OPT(i-1,p)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

שימו לב: אם שני האיברים הם ∞, אזי $OPT(i,p) = \infty$.

ב. **אלגוריתם רקורסיבי:**
יהי M מערך בגודל $(n+1)\cdot(nP+1)$. $M[i,p]$ הוא המשקל הקטן ביותר של קבוצה המוכלת ב-$\{1,\dots,i\}$ ומחירה בדיוק p.
נקרא לפרוצדורה **Memoized-knapsack** $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{P})$ עם $P = \max\{p_i\}$.

Memoized-knapsack $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{P},\boldsymbol{W})$
for $i = 0$ *to* n *do*
  for $p = 0$ *to* $n \cdot P$ *do*
    $M[i,p] = undefined$
for $p = 0$ *to* $n \cdot P$ *do*
  Alternative-algo (n,p)

Alternative-algo $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{p})$
if $(M[i,p] \neq undefined)$, then: return $M[\mathrm{i},\mathrm{p}]$
else if ($i = 0$ and $p = 0$), then: $M[\mathrm{i},\mathrm{p}] = 0$
else if ($i = 0$ and $p > 0$), then: $M[\mathrm{i},\mathrm{p}] = \infty$
else:

  If ($p < p_i$), then: $M[\mathrm{i},\mathrm{p}] =$ Alternative-algo $(\mathrm{i}-1,\mathrm{p})$

  else $M[\mathrm{i},\mathrm{p}] = \mathrm{MIN}\,(\text{Alternative-algo}\,(\mathrm{i}-1,\mathrm{p}-\mathrm{p_i}) + w_i, \text{Alternative-algo}\,(\mathrm{i}-1,\mathrm{p}))$

Return $M[\mathrm{i},\mathrm{p}]$

a. חישוב המחיר האופטימאלי של קבוצה חוקית מערכי המשתנים שחישבנו ניתן למצוא על ידי סריקת השורה האחרונה. מחיר האופטימאלי הוא ה-p המקסימאלי כך ש- $M[n,p] \le W$.
b. טענה: זמן הריצה של האלגוריתם הינו $O(n^2 \cdot P)$.
הסבר: זמן ריצת הפרוצדורה הכולל קריאות רקורסיביות עבור ערכים שכבר הוגדרו הוא $O(1)$. לכל תא בטבלה, עושים קריאה רקורסיבית אחת כאשר התא אינו מוגדר. יש סה"כ $(n+1)\cdot(nP+1) = n^2P + n + nP + 1$ תאים ולפיכך, סה"כ זמן הריצה הוא $O(n^2 \cdot P)$. האלגוריתם אינו פולינומאלי, כי ייצוג המחירים דורש $\log P$ ביטים, והאלגוריתם תלוי ב-P (כלומר אקספוננציאלי ב-$\log P$). האלגוריתם הוא פולינומאלי כאשר $P < n$, וכן זמן הריצה של האלגוריתם במקרה זה הינו $O(n^3)$.

ג. ניתן לבדוק האם האיבר ה-n הוא בפתרון אופטימאלי בדרך הבאה: נסמן מחיר אופטימאלי ב-P^*. אם $M[n-1, P^* - p_n] + w_n \le W$, אזי האיבר ה-n הינו חלק מפתרון אופטימאלי.

שאלה 3:

א. **הגדרת תתי בעיות:** נגדיר את $OPT(i,j)$ להיות משקל מקסימאלי של סדרת אינדקסים חוקית המסתיימת בתא ה- i,j.
ניסוח נוסחת רקורסיה:
מקרי בסיס:
- אם $i = 1$, $1 \le j \le m$, אזי: $OPT(i,j) = W[1,j]$.

מקרה כללי:

- אם $j = 1$, אזי: $OPT(i,j) = \mathrm{W[i,j]} + \min\{OPT(i-1,j), OPT(i-1,j+1)\}$
- אחרת אם $j = m$, אזי: $OPT(i,j) = \mathrm{W[i,j]} + \min\{OPT(i-1,j-1), OPT(i-1,j)\}$
- אחרת, $OPT(i,j) = \mathrm{W[i,j]} + \min\{OPT(i-1,j-1), OPT(i-1,j), OPT(i-1,j+1)\}$

הוכחת נוסחת הרקורסיה:

אם $i = 1$, אזי $OPT(i,j) = W[1,j]$ והנוסחה נכונה.

נשקול אם כך את המקרה בו $i \neq 1$. נתבונן במקרה $1 < i < m$, המקרים האחרים שקולים.

I. **זיהוי תתי-קבוצות של פתרונות אפשריים**. תהי S_k קבוצת כל הסדרות האפשריות המסתיימות בתא ה- $[i,k]$. לכל S_k, נגדיר את קבוצות הפתרונות הבאים:
קבוצה 1: $S_{k,1}$ - להיות קבוצת הסדרות החוקיות $j_1, \dots, j_i$ כך ש: $j_i = k$, $j_{i-1} = k-1$.
קבוצה 2: $S_{k,2}$ - להיות קבוצת הסדרות החוקיות $j_1, \dots, j_i$ כך ש: $j_i = k$, $j_{i-1} = k$.
קבוצה 3: $S_{k,3}$ - להיות קבוצת הסדרות החוקיות $j_1, \dots, j_i$ כך ש: $j_i = k$, $j_{i-1} = k+1$.

II. **איחוד הקבוצות** $S_{k,1}, S_{k,2}, S_{k,3}$ **מכסה את** S_k, שכן כל סדרה אפשרית המסתיימת בתא ה- $[i,k]$, עוברת באחד מן התאים: $[i-1,k-1]$, $[i-1,k]$, $[i-1,k+1]$.

III. **תצורה כללית של נוסחת הרקורסיה.** עבור $S_{k,p}$, $1 \leq k \leq m,\ p \in \{1.2.3\}$. נסמן ב- $OPT(S_{k,p})$ משקל סדרת אינדקסים <u>אופטימאלית</u> ב-$S_{k,p}$. כלומר: $OPT(S_{k,p}) = \min_{U \in S_{k,p}}\{W(U)\}$. מ- (II) נובע כי:
$OPT(i,k) = \min\{OPT(S_{k,1}), OPT(S_{k,2}), OPT(S_{k,3})\}$.

IV. **תצורת הפתרון בקבוצה** $S_{k,1}$ (סימטרי עבור $S_{k,2}$ ו-$S_{k,3}$).
נוכיח כי: $OPT(S_{k,1}) = OPT(i-1,k-1) + W[i,k]$.
כיוון ראשון ($\leq$): תהי S סדרה חוקית של אינדקסים $j_1, \dots, j_{i-1}$ כך ש: $W(S) = OPT(i-1,k-1)$. לכן הסדרה, $j_1, \dots, j_{i-1}, j_i$ כאשר $j_i = k$, היא סדרה חוקית ב- $S_{k,1}$ שמשקלה: $OPT(i-1,k-1) + W[i,k]$. ולכן:
$OPT(S_{k,1}) \leq OPT(i-1,k-1) + W[i,k]$ (כי משקל סדרה מינימאלית קטן/שווה ממשקל סדרה חוקית בקבוצה).
כיוון שני ($\geq$):
נניח בשלילה כי $OPT(S_{k,1}) < OPT(i-1,k-1) + W[i,k]$ ותהי S' סדרה חוקית של אינדקסים $j_1, \dots, j_i$ כך ש $j_i = k$, $j_{i-1} = k-1$ ו- $W(S) = OPT(S_{k,1})$. לכן, $W(S) < OPT(i-1,k-1) + W[i,k]$. $W(S)$ מורכב ממשקל סדרה חוקית של אינדקסים S המסתיימת ב תא ה-$[i-1,k-1]$, דהיינו $j_1, \dots, j_{i-1}$ וממשקל התא ה- $[i,k]$. כלומר,
$W(S) + W[i,k] = W(S') = OPT(S_{k,1}) < OPT(i-1,k-1) + W[i,k]$.
קיבלנו $W(S) < OPT(i-1,k-1)$, בסתירה לכך ש- S פתרון חוקי המסתיים בתא ה- $[i-1,k-1]$.
משני הכיוונים נסיק $OPT(S_{k,1}) = OPT(i-1,k-1) + W[i,k]$.

סיכום: התצורה הכללית של נוסחת הרקורסיה ומתצורת הפתרון בכל קבוצה נסיק את נכונות נוסחת הרקורסיה.

ב. **אלגוריתם איטרטיבי:**
נגדיר את M להיות מערך בגודל $\mathrm{n} \cdot (m+2)$ (נוסיף 2 עמודות לטיפול בקצוות המטריצה)

1) <u>אתחול:</u>
a. <u>לולאה:</u> עבור i=1 ועד n: (אתחול זה נועד לטיפול בקצוות)

קבע $M[i,0]=\infty$, $M[i,m+1]=\infty$

b. לולאה: עבור j=1 ועד m:

קבע $M[1,j]=W[1,j]$

2) לולאה: עבור i=2 ועד n:

a. לולאה: עבור $j=1$ ועד m:

קבע:

$$M[i,j]= \mathrm{W[i,j]}+\min\{M[i-1,j-1],M[i-1,j],M[i-1,j+1]\}$$

כדי למצוא משקל מינימאלי של סדרה חוקית מתוך ערכי המשתנים שחישבנו, נחפש תא בעל ערך מינימאלי בשורה ה- n-ית של M. כלומר, נחשב $M=\min_{1\le \mathrm{j}\le \mathrm{m}}\{\mathrm{M[n,j]}\}$.

ג. טענה: זמן ריצת האלגוריתם הוא $O(n\cdot m)$.
הסבר: ישנם סה"כ $n\cdot m$ תאים. מילוי כל תא לוקח זמן קבוע (מינימום מבין 3 תאים). לפיכך זמן מילוי כל התאים הינו $O(n\cdot m)$.

ד. **אלגוריתם לשחזור פתרון:**

1) יהי M משקל סדרה חוקית מינימאלית ו- j אינדקס כך ש- $M[n,j]=M$
2) $S[n]=j$ (נחזיר מערך S: $S[1],\dots,S[n]$)
3) לולאה: עבור $i=n$ עד 1 בצע:
   a. $k\leftarrow S[i]$
   b. אם $(M[i,k]=M[i-1,k-1]+W[i,k])$, אזי $S[i-1]=k-1$
   c. אחרת אם $(M[i,k]=M[i-1,k]+W[i,Sk])$, אזי $S[i-1]=k$
   d. אחרת, $S[i-1]=k+1$
4) החזר: S

טענה: האלגוריתם מחזיר סדרה של אינדקסים חוקית S בעלת משקל מינימאלי.
הוכחה: אם $OPT(i,k)=OPT(i-1,k-1)+W[i,k]$, אזי קיים פתרון אופטימאלי בו האינדקס האחרון הוא $[i,k]$ ומורכב מפתרון אופטימאלי עבור $(i-1,k-1)$, ובאינדוקציה נובע שהאלגוריתם מוצא פתרון אופטימאלי.

שאלה 4:

א. טענה: אם האלגוריתם הנ"ל עוצר, אז קיבלנו אורכי מסלולים קצרים ביותר, כלומר d(v) הוא אורך מסלול קל ביותר מ- s ל- v.

הוכחה: לכל $v\in V$, נסמן ב-$\delta(s,v)$ אורך מסלול קל ביותר מ- s ל- v. הוכחנו בכיתה, שלכל $v\in V$, $d(v)\ge\delta(s,v)$. נתון כי הגרף עם משקלות חיוביים, לפיכך, מזמן האתחול ☆עד סוף האלגוריתם: $d(s)=0$. האלגוריתם הנ"ל עצר, לפיכך, לכל $(u,v)\in E$: $d(v)\le d(u)+w(u,v)$ (אחרת היה עוד קודקוד שניתן להפעיל עליו Relax, בסתירה לכך שהאלגוריתם עצר). נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. כלומר קיים $v\in V$, עבורו מתקיים: $d(v)>\delta(s,v)$. יהי $[s=v_0,\dots,v_k=v]$ מסלול קל ביותר מ-s ל-v. ידוע כי $d(s)=0$, $\delta(s,v_i)=\delta(s,v_{i-1})+w(v_{i-1},v_i)$ לכל $i>0$, וגם $d(v)>\delta(s,v)$. מכאן, קיים $i>0$ מינימאלי עבורו מתקיים: $d(v_i)>\delta(s,v_i)$, ולפיכך:

סתירה (כי קיבלנו ש- $d(v_i) > d(v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i)$, בסתירה ל- ☆).

ב. <u>טענה ראשית</u>: האלגוריתם מבצע לכל היותר $O(n!)$ פעולות Relax.
<u>טענת עזר</u>: יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון וקדקודים $s, v \in V$. מספר המסלולים האפשריים מ-s ל-v הוא $O((n-1)!)$.

<u>הוכחת טענת עזר</u>: מסלול אפשרי (פשוט) מ-s ל-v יכול לכלול כל צומת בגרף. יש $n-2$ צמתים נותרים במסלול באורך n מ-s ל-v, ולפיכך יש לכל היותר $(n-2)!$ מסלולים אפשריים באורך n. כמו כן, כל מסלול באורך קטן מ-n הוא רישא של מסלול באורך n ויש $n-2$ כאלו. לפיכך, מספר המסלולים האפשריים מ-s לכל $v \in V$ הוא לכל היותר $(n-2)! \cdot (n-2) = O((n-1)!)$.

<u>הוכחת טענה ראשית</u>: הוכחנו בכיתה שבאלגוריתם המתואר בשאלה, ערך כל צומת בכל שלב באלגוריתם, הוא אורך של מסלול (או אינסוף), ומכיוון שהמשקלים חיוביים מסלול זה חייב להיות פשוט. כמו כן, יש $O((n-1)!)$ מסלולים אפשריים המסתיימים בצומת v. לכן, מספר פעולות ה-Relax עבור צומת הוא $O((n-1)!)$ ומספר פעולות Relax הכולל באלגוריתם הוא $O(n \cdot (n-1)!) = O(n!)$.

ג. נבחן את מספר העדכונים האפשריים לרשת בעלת n משולשים. נסמן את מספר העדכונים ברשת בעלת i משולשים ב- a_i.
עבור רשת עם משולש אחד, מספר פעולות ה- $Relax$ הוא 3 . תחילה המסלול העליון: $(x_0, y_0), (y_1, x_0)$, ואז המסלול התחתון (y_1, y_0) (ניתן לעדכן כי משקל המסלול התחתון נמוך יותר). לפיכך, $a_1 = 3$. עבור רשת עם שני משולשים, מספר פעולות ה- $Relax$ הוא $3 + 2 \cdot 3 = 3 + 1 + 3 + 2$. תחילה המסלול העליון של המשולש השני $(x_1, y_1), (y_2, x_1)$, ואז עדכון כל המסלולים האפשריים במשולש הראשון. לאחר מכן, עדכון המסלול התחתון של המשולש השני (y_2, y_1), ואז עדכון כל המסלולים האפשריים במשולש הראשון.לפיכך, $a_2 = 3 + 2 \cdot a_1$. ובאופן כללי, עבור רשת עם i משולשים, $a_i = 3 + 2 \cdot a_{i-1}$. אם כך, עבור n משולשים: $a_n = 6 \cdot n + 3 \cdot 2^n$. נשים לב, שלאחר כל עדכון של צלע כמתואר לעיל במשולש ה-i, ניתן לעדכן את כל המסלולים האפשריים במשולשים הקודמים ל- i (זה נובע ממשקלי הצלעות בכל משולש).