תכנון אלגוריתמים 202-1-2041 – סמסטר ב' תשס"ו
בוחן אמצע סמסטר – 12.5.2006

ללא חומר עזר

<u>הנחיות חשובות:</u>

- הבוחן הינו ללא חומר עזר.
- משך הבוחן שעתיים.
- פתרו את המבחן תחילה במחברת הטיוטא. לאחר מכן העתיקו את התשובות למקום המיועד בטופס התשובות. **בדיקת הבוחן לא תביא בחשבון את מחברת הטיוטה או תוספות בגב העמוד.**
- רשמו את מספר הנבחן בראש כל דף.
- הבוחן מורכב מ-3 שאלות, יש לענות על כל השאלות. לסדר הופעת השאלות בטופס אין משמעות כלל בהקשר לקושי השאלה.
- מותר להשתמש במבני נתונים ידועים מבלי לפרט את מימושם.
- כל שימוש בתוצאה מעבודות הבית דורשת הוכחה מלאה.
- במידה והינכם מסתמכים על טענות ומשפטים מהכיתה נסחו את אלו במדויק.
- **אם לא מצוין במפורש אחרת, על תיאור אלגוריתם לכלול ניתוח זמן ריצה והוכחת נכונות.**
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף**
- מותר להשתמש בעיפרון, אך במידה והינכם עושים זאת וודאו כי מה שכתבתם הינו קריא.

בהצלחה !

שאלה 1: (34 נקודות)

תהינה x,y זוג סדרות. סדרה z תיקרא **סדרת על** של הסדרות x,y אם z מכילה את x ו y **כתתי-סדרות.**
למשל, הסדרה aadas הינה סדרת על של הסדרות aas ו ads.

תארו אלגוריתם יעיל, המבוסס על רדוקציה, לפתרון הבעיה הבאה.

מופע: זוג סדרות x,y באורכים m,n בהתאמה.
יש למצוא: סדרת על של x ו y באורך מינימאלי.

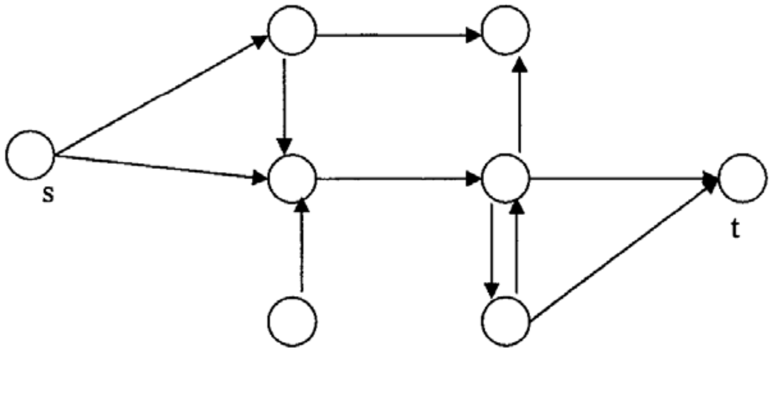
שאלה 2: (33 נקודות)

הגדרה:

*גרף מכוון G עם משקלות על הצלעות (לאו דווקא אי-שליליים) יקרא **גרף מצעד** אם זה מורכב מ N שכבות של קודקודים כך ש:*

1. *שכבה 1 מכילה קודקוד יחיד $s \in V(G)$. שכבה N מכילה קודקוד יחיד $t \in V(G)$.*
2. *כל שכבה $1<j<N$ מכילה R קודקודים בדיוק הממוספרים $1,\dots,R$.*
3. *לקודקוד j בשכבה ה i כך ש: $2 \le j \le R-1$ ו $2 \le i \le N-1$, תיתכנה צלעות רק לקודקודים $j+1,j-1$ בשכבה ה i, ובנוסף תיתכן צלע יחידה לקודקוד ה j בשכבה ה $i+1$.*
4. *לקודקוד 1 בשכבה ה $2 \le i \le N-1$ תיתכן צלע המכוונת אל קודקוד 2 בשכבה ה i, ותיתכן צלע לקודקוד 1 בשכבה ה $i+1$. לקודקוד R בשכבה ה $2 \le i \le N-1$ תיתכן צלע המכוונת אל קודקוד $R-1$ בשכבה ה i ותיתכן צלע לקודקוד R בשכבה ה $i+1$.*
5. *הקודקוד s מחובר למספר שרירותי של קודקודים אשר מצויים רק בשכבה 2.*
6. *לקודקוד t מחוברים מספר שרירותי של קודקודים אשר מצויים רק בשכבה $N-1$.*

להלן דוגמה לגרף מצעד עבור N=4 , R = 3.



N=4 R=3

בהינתן גרף מצעד G וסידורו לפי שכבות כפי שתואר לעיל, הציעו אלגוריתם יעיל, מבוסס **תכנון דינאמי**, למציאת מסלול **פשוט** בעל משקל **מקסימאלי** מ s ל t ב G. ענו של הסעיפים הבאים.

סעיף א: נסחו והוכיחו טענת תת-מבנה אופטימאלי.
סעיף ב: נסחו תת-בעיה אופיינית.
סעיף ג: נסחו נוסחת רקורסיה והגדירו תנאי בסיס.
סעיף ד: תארו אלגוריתם איטראטיבי **בלבד – אין לתאר אלגוריתם רקורסיבי**.
סעיף ה: נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם אשר הצעתם בסעיף ד לשאלה זו.

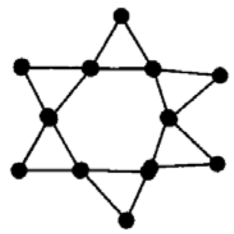
שאלה 3: (33 נקודות)

סעיף א (12 נקודות):
הוכיחו את הטענה הבאה:

יהי G גרף לא מכוון ותהי $w: E(G) \to \Re$ פונקצית משקל. יהי C מעגל ב G. תהי $e \in E(C)$ הצלע בעלת משקל מקסימאלי מבין צלעות C . יהי G' *הגרף המושג מ* G על ידי הסרת הצלע e.
אזי G' מכיל MST של G .

הגדרה:
יהי C מעגל בעל k צלעות.
*גרף לא מכוון G יקרא **גרף פרח מסדר k** אם מתקיימים עבורו שני התנאים הבאים:*
1. $V(G) = V(C) \cup \{z_e : e = (u,v) \in E(C)\}$.
2. $E(G) = E(C) \cup \{(z_e,u),(z_e,v) : e = (u,v) \in E(C)\}$.

לדוגמא, להלן גרף פרח מסדר 6.



סעיף ב (3 נקודות):
יהי G גרף פרח מסדר k ה מיוצג על פי רשימת שכנויות **בלבד** של קודקודיו. תהי $w: E(G) \to \Re$ פונקצית משקל. הראו כי זמן הריצה הנדרש למציאת MST של G באמצעות אלגוריתם Prim הינו $O(|V(G)| \log |V(G)|)$.

סעיף ג (18 נקודות):
יהי G גרף פרח מסדר k ה מיוצג על פי רשימת שכנויות **בלבד** של קודקודיו. תהי $w: E(G) \to \Re$ פונקצית משקל. תארו אלגוריתם ליניארי ב |V(G)| למציאת MST של G.

בהצלחה!

תכנון אלגוריתמים 202-1-2041 – סמסטר ב' תשס"ו
בוחן אמצע סמסטר – 12.5.2006
דף תשובות

30/34

שאלה 1:

X, Y → I → המרה ע"י אורך מינימלי → המרת הפלט → Z באורך k

נבצע רדוקציה לבעיית ההעתקה באורך מינימלי של שני סדרות.

קלט: X, Y

בניית הרדוקציה: בונה הקלט.

פלט הקופסא השחורה: X', Y' העתקה מינימלית ל-X ו-Y באורך k.

בניית המרת הפלט:

```
for i = 1 to k
    if x'[i] != "_"
        z[i] = x'[i]
    else
        z[i] = y'[i]
return z
```

* נשים לב כי אם x[i]!="_" וגם y[i]!="_" אז x[i] = y[i]. בנוסף, לא יתכן כי x[i]=y[i]="_" (מסיבה לאופטימליות הפתרון של הקופסא השחורה). לכן y[i]!="_" ⇐ z[i]=y[i].

הוכחה:

נראה כי Z פתרון חוקי ואופטימלי.

תת סדרה: X תת סדרה של Y אם קיימים אינדקסים $1 \le i_1 < i_2 < .. < i_m \le n$ כך ש- $x_j = y_{i_j}$ $\forall j=1..m$ (X באורך m, Y באורך n).

חוקי: יהי $i_m \le k$ ... $1 \le i_1 < i_2$ האינדקסים של האיברים של X בהעתקה X'. בנוסף, $x'[i_j] != "\_"$ $\forall j=1..m$ ולכן $x'[i_j] = z[i_j]$ $\forall j=1..m$. לכן $x[i] = z[i_j]$ $\forall j=1..m$ ולכן X תת סדרה של Z. באופן דומה עבור Y.

אופטימלי: נניח Z' פתרון באורך k'<k. עפ"י הגדרות X, Y תת סדרות של Z'. נעמיד את הסדרה X כך שכל איבר בה יתאים לאיבר ב-Z', ונשים "_" במקומות הריקים. נקרא לה X' ~~נעשה עם Y~~ נעשה Y' באופן דומה. קיבלנו העתקה ל-X ו-Y באורך k' שקטן ממש מ-k. סתירה לאופטימליות Z. (שים x'[i]!="_" אז x'[i] = z[i], אם y'[i]!="_" אז y'[i] = z[i], ולכן אם שניהם לא "_" אז x'[i] = y'[i]).

זמן ריצה: זמן ריצת הקופסא השחורה $O(m \cdot n)$ המרת הפלט: $O(k) = O(m+n)$
סה"כ: $O(mn)$

בקיצור
כדי להראות
קיום
לפתרון
בגודל
(k)
חייב
צריך להראות
שהוא יותר
גדול!!

יש לך הנחה חזקה מידי שהוני מקבלים העתקה מינימלית (וזה לא מה שלמדנו)

$\frac{33}{33}$

שאלה 2:

סעיף א:

יהי P^* מסלול אופטימלי עבור הבעיה $A[i,j,d]$

מקרים: א. אם $e=((i,j),(i,j+1)) \in P^*$

אזי $P^* \setminus \{e\}$ מסלול אופטימלי עבור הבעיה $A[i,j+1,1]$

ב. אם $e=((i,j),(i,j-1)) \in P^*$

אזי $P^* \setminus \{e\}$ מסלול אופטימלי עבור הבעיה $A[i,j-1,2]$

ג. אם $e=((i,j),(i+1,j)) \in P^*$

אזי $P^* \setminus \{e\}$ מסלול אופטימלי עבור הבעיה $A[i+1,j,0]$.

הוכחה:

א. נניח כי לא מתקיים לכן קיים מסלול P' אופטימלי עבור הבעיה $A[i,j+1,1]$ ו-P' לו מחיר גדול יותר משל [illegible] ולכן ניתן לצרף אליו את e ולקבל מסלול עם משקל גדול יותר מ-P^* עבור הבעיה $A[i,j,d]$

גם בשלמה לב' וג'

ג. נניח כי לא מתקיים, לכן קיים מסלול P' אופטימלי עבור הבעיה, נצרף אליו את e ונקבל מסלול בעל משקל גדול יותר מ-P^* עבור ~~הבעיה~~ $A[i,j,d]$.

1. אין הגדרה ל-$A[i,j,d]$ במסגרת הטענה
ראה גם בדרך בפתרונות האלגוריתם.

2. ההוכחה מינימליסטית אבל בסדר

$\frac{10}{10}$

סעיף ב:

הנה זה כאן!

$A[i,j,d] =$ ~~[illegible]~~ משקל מקסימלי מ- (i,j) ל- t

כאשר: $d=1$: מ-(i,j) ניתן להתקדם ימינה בלבד (או למטה)

$d=2$: מ-(i,j) ניתן להתקדם שמאלה בלבד (או למטה)

$d=0$: מ-(i,j) ניתן לה תקדם שמאלה או ימינה (או למטה).

$\frac{3}{3}$

סעיף ג:

$\max\{k \to e\}$ משמעו: אם e מקיים ניקח למקסימום על e.
המשמעות $A[i,j,d]$ מכילה משקל המסלול האופטימלי לנקודה זו.

$$A[i,j,d] = \begin{cases} d=1: & \max\{e=((i,j),(i,j+1)) \in E \longrightarrow A[i,j+1] + w(e), \\ & e=((i,j),(i+1,j)) \in E \longrightarrow A[i+1,j] + w(e)\} \\ d=2: & \max\{e=((i,j),(i,j-1)) \in E \longrightarrow A[i,j-1] + w(e), \\ & e=((i,j),(i+1,j)) \in E \longrightarrow A[i+1,j] + w(e)\} \\ d=0: & \max\{A[i,j,1], A[i,j,2]\} \end{cases}$$

מקרי בסיס: $A[N,j,d] = 0$

(*) בסוף, הפתרון הוא: $\max\{A[1,j,0] + w(e) \mid e=((1,1),(1,j)) \in E\}$

10/10

סעיף ד:

1. אתחול ע"פ מקרי בסיס.	**: בגרסאות שלא מוצגות (...)
$O(RN)$ 2. for $i = N-1$ downto 2	נשמור בכל תא מאיזה כיוון הגענו
3. for $j = 1$ to R	ונשחזר מסלול ע"י
4. $A[i,j,2] =$ נוסחת הרקורסיה כאשר $d=2$	שיטה זו. (back-tracking)
5. for $j = R$ downto 1	$O(RN)$
6. $A[i,j,1] =$ נוסחת הרקורסיה כאשר $d=1$	
7. for $j = 1$ to R	8/8
8. $A[i,j,0] =$ נוסחת הרקורסיה כאשר $d=0$	
9. for $j = 1$ to R	
10. $x =$ (*) חישוב	

11. return x.

סעיף ה:

זמן ריצה: $O(RN) + 3RN = O(RN)$
אתחול המערך

2/2

יפה

שאלה 3:

סעיף א:

נמצא MST של G המורחב ב-G'. $e=(u,v)$

יהי T MST של G. אם הצלע e לא נמצאת ב-T אז סיימנו. אם היא נמצאת

ב-T, אז נוריד אותה. מאחר ש-T הוא עץ, אז נקבל שני רכיבי קשירות. עפ"י המשפט

C, אנו יודעים שקיים מסלול בין u ל-v שלא עובר ב-e, בו משקל כל קשת ≥ משקל e. נבחר לעבור

על הקשתות מ-u במסלול זה עד שנגיע ל-v. מאחר ש-u ו-v שייכים לרכיבי קשירות שונים, אחד

מהצלעות בה עברנו העבירה אותנו מהרכיב של u לרכיב של v. נסמן אותה ב-e'. נוסיף קשת זו

לשני רכיבי הקשירות, נקבל גרף קשיר וללא מעגלים. (אם יש מעגל זה אומר שקיים היה מסלול בין u ל-v אין כם

ברכיבי קשירות נפרדים) קיבלנו עץ פורש בעל משקל קטן או שווה למשקל T, לכן מינימלי, ובנוסף $e \notin T'$

ולכן $T' \subseteq G'$ (כרוך ., $T' \subseteq G$)

12

סעיף ב:

עפ"י הנחיה, ניתן למצוא MST של G בזמן $O(|E|\log|V|)$.

נשים לב כי בגרף זה $2|V(G)|=|E(G)|=|V(G)|$ $2|V(G)|=\{(z_e,v),(z_e,u): e=(u,v)\in E(G)\}$

לכן $|E(G)|=3|V(G)|=O(V(G))$. לכן נקבל זמן ריצה: $O(|V|\log|V|)$

$\frac{3}{2}|V(G)|$

3

סעיף ג: נסמן את קודקודי C: $v_1 \cdots v_n$, $v_1 = v_{n+1}$

__אלגוריתם:__

$O(n)$ 1. עבור כל i מ־1 עד n:

2. הורד מ־G את הצלע המקסימלית מבין הצלעות המחברות בין הקודקודים $v_i, v_{i+1}, z_{(i,i+1)}$

$O(n)$ 3. הפעל BFS ומצא מעגל.

$O(n)$ 4. עבור על כל צלע במעגל ושמור ב־e את המקסימלית   +12

5. החזר $G \setminus \{e\}$.

__הוכחה:__

נבחין כי G קשיר, עם 2n קודקודים ו־3n צלעות.
אחרי כל הורדה של צלע ב־(2.) הגרף עדיין מכיל MST של G המקורי. (עפ"י סעיף א. הורדנו את הצלע המקסימלית שבמעגל). הצלע שהורדנו היא ממעגל, לכן הגרף נשאר קשיר.
לאחר סיום הלולאה נשאר עם 2n צלעות, 2n קודקודים והגרף קשיר. לכן יש מעגל. נמצא אותו ב־BFS ונוריד את הצלע המקסימלית בו ונחזיר, הגרף שהחזרנו הוא בעל 2n קודקודים, 2n-1 צלעות וקשיר. (ומוכל בגרף המקורי).
לכן הוא עץ פורש. בנוסף, עפ"י א, מכיל MST של G המקורי, ולכן הוא ה־MST של G.   +7

זמן ריצה: $O(n) = O(V(G))$ +4

18