תרגול 9 – זרימה II

חלק א'- פורד פולקרסון:

- **רשת זרימה** היא רביעייה $N=\left(\left(V,E\right),c,s,t\right)$, כאשר:
  - $G=\left(V,E\right)$ הוא גרף מכוון.
  - $s\in V$ הוא קודקוד המקור.
  - $t\in V$ הוא קודקוד הבור.
- $c: E\rightarrow R$ היא פונקצית הקיבולת, אשר מקיימת: $c(e)>0$ לכל $e\in E$.

  בנוסף מניחים ש : $c(u,v)=0$ לכל $(u,v)\notin E$.

- **זרימה f** ברשת $N=\left(\left(V,E\right),c,s,t\right)$ היא פונקציה $f:V\times V\rightarrow R$, המקיימת את שלוש התכונות הבאות:
  - אילוצי קיבול: לכל $v,u\in V$, $f(v,u)\le c(v,u)$. יש לשים לב, **שהזרימה** על קשת יכולה להיות שלילית אבל **הקיבולת** לא.
  - אנטי סימטריה: לכל $v,u\in V$ מתקיים $f(v,u)=-f(u,v)$
  - שימור זרימה: לכל $u\in V\setminus\{s,t\}$ מתקיים $\sum_{v\in V} f(u,v)=0$

  (סכום הזרימה על הצלעות הנכנסות ל-u שווה לסכום הזרימה על הצלעות היוצאות מ-u).

- **גודל של זרימה f** הוא סך הזרימה היוצאת מ- s, כלומר $\left|f\right|=\sum_{v\in V} f(s,v)$.

  (הגדרה סימטרית – סך הזרימה הנכנסת ל- t, כלומר $\left|f\right|=\sum_{v\in V} f(v,t)$).

- **רשת שיורית (residual network)**: בהינתן רשת $N=\left(\left(V,E\right),c,s,t\right)$, וזרימה f ברשת, הרשת השיורית היא $N_f=\left(\left(V,E_f\right),c_f,s,t\right)$, כאשר:
  - הקיבולות השיורית c_f מוגדרת לכל $u,v\in V$ כ- $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$.
  - קבוצת הצלעות השיורית E_f מוגדרת על ידי $E_f=\left\{(u,v):c_f(u,v)>0\right\}$.

  (שימו לב כי רשת שיורית הינה רשת זרימה.)

- **<u>קיבולת של מסלול</u>**: בהינתן מסלול, הקיבולת של המסלול היא הקיבולת המינימאלית מבין כל הצלעות שעל המסלול (צוואר הבקבוק).

- **<u>חתך ברשת זרימה</u>**: חתך (S,T) (עם $T = V \setminus S$), כאשר $s \in S$ ו- $t \in T$.

- **<u>קיבולת של חתך</u>**: עבור חתך (S,T), קיבולת החתך הוא סך הקיבולות על הצלעות <u>היוצאות</u> מ- S <u>ונכנסות</u> ל- T, כלומר $c(S,T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u,v)$

<u>בעיית הזרימה:</u>

- מופע: רשת זרימה $N = \left((V,E),c,s,t\right)$. צריך למצוא: זרימה f ברשת N בעלת גודל מקסימאלי.

<u>משפט</u> (Min-Cut – Max-Flow):

גודל הזרימה המקסימאלית ברשת שווה לקיבול החתך המינימלי ברשת.

<u>אלגוריתם פורד פולקרסון (Ford-Fulkerson):</u>

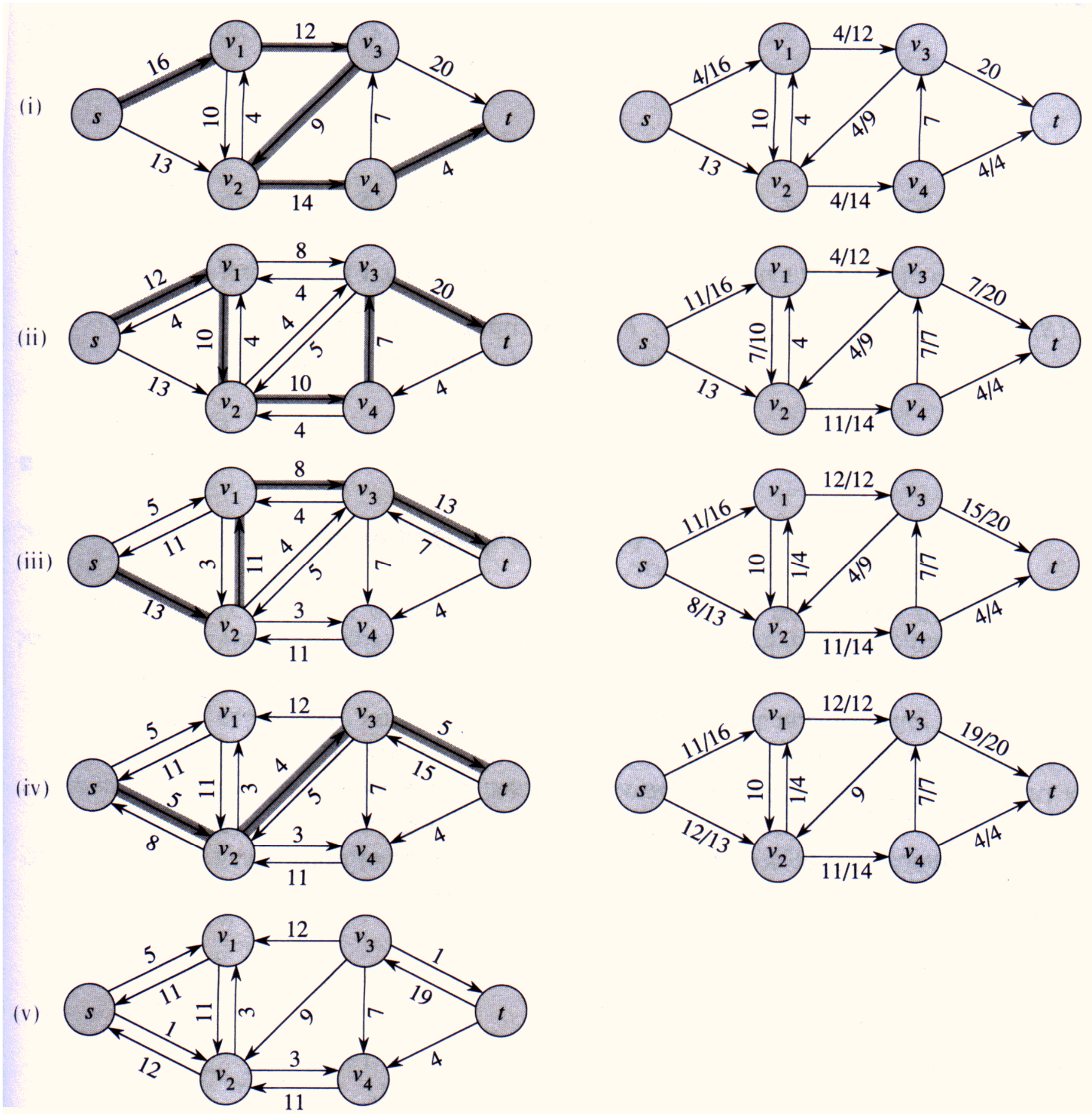
לצורך פתרון הבעיה נשתמש באיטרציות-שיפור כאשר בכל שלב נחזיק:

- פונקצית זרימה נוכחית – f.
- רשת שיורית N_f – רשת זרימה הנגזרת מהרשת המקורית N, והזרימה הנוכחית f.

אלגוריתם פורד פולקרסון:

- אתחול: לכל $u,v \in V$: $f(u,v) \leftarrow 0$.
- בנה רשת שיורית N_f.
- כל עוד קיים ברשת השיורית N_f מסלול מ- s ל- t בצע:
  - מצא מסלול פשוט (כלשהו) P ב- N_f מ- s ל- t, ותהי $c_f(p)$ הקיבולת של P.
  - חשב תוספת זרימה:
    - לכל קשת $(u,v) \in P$, עדכן: $f'(u,v) = c_f(p)$,
      ו- $f'(v,u) = -c_f(p)$
    - לכל קשת $(u,v) \notin P$: $f'(u,v) = 0$.
  - עדכן את הזרימה $f \leftarrow f + f'$ ובנה רשת שיורית N_f.
- החזר את f.

דוגמת ריצה של האלגוריתם (מימין - הרשת המקורית והזרימה הנוכחית ברשת, משמאל - הרשת השיורית):

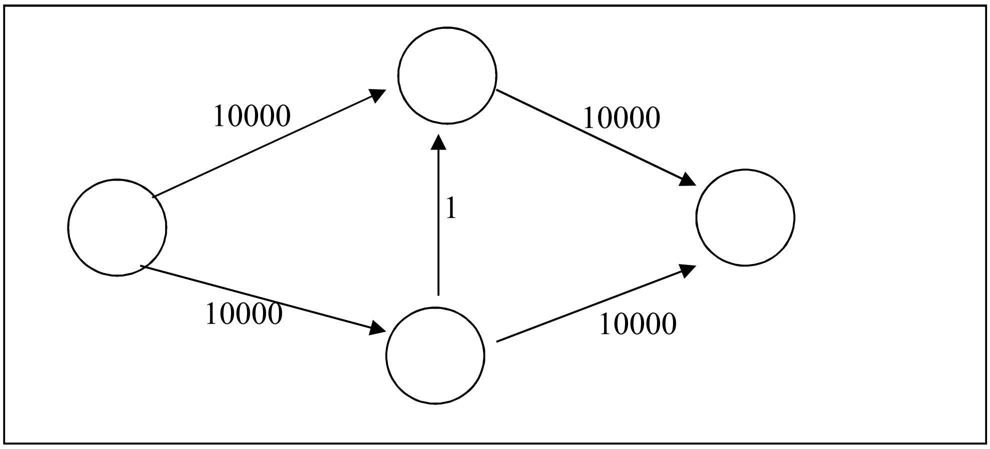


<u>ניתוח זמן ריצה:</u>

אם הקיבולים בשלמים אזי האלגוריתם של Ford-Fulkerson רץ ב-$O(|E||\hat{f}|)$ כאשר $|\hat{f}|$ הוא הגודל הזרימה המקסמלית.

בכל איטרציה מחושב מסלול שיפור בזמן $O(|E|+|V|)$ (ע"י BFS או DFS), וגודל הזרימה הנוכחית גדל ב-1 (כיוון שיש צלע היוצאת מ-s על מסלול השיפור אשר הזרימה עליה גדלה בלפחות יחידה). לכן לאחר לכל היותר $|\hat{f}|$ איטרציות, לא ניתן יהיה להגדיל את הזרימה.

דוגמה לגרף בו תתכן ריצה לא יעילה:



חלק ב'- Edmonds - Karp:

צורת מימוש אחת של אלגוריתם פורד-פולקרסון המופשט היא השיטה של אדמונדס –וקארפ. בכל איטרציה מחפש מסלול מ- s ל- t, אך נדרוש שזה יהיה מסלול קצר ביוצר (מבחינת אורך צלעות) הניתן למצוא ברשת השיורית. בכל שלב נחפש ברשת השיורית בדיוק מסלול אחד כזה P ונרווה את הזרימה על מסלול על פי הקיבול השיורי לאורך P המהווה את צוואר הבקבוק. לאחר מיכן נעדכן את הרשת השיורית ונמשיך לאיטרציה הבאה.

אלגוריתם אדמונדס קארפ:

- אתחול: לכל $u,v \in V$: $f(u,v) \leftarrow 0$.
- בנה רשת שיורית N_f.
- כל עוד קיים ברשת השיורית N_f מסלול מ- s ל- t בצע:
  - **מצא מסלול פשוט הקצר ביותר בצלעות** P ב- N_f מ- s ל- t, ותהי $c_f(p)$ הקיבולת של P.
  - חשב תוספת זרימה:
    - לכל קשת $(u,v) \in P$, עדכן: $f'(u,v) = c_f(p)$,
      ו- $f'(v,u) = -c_f(p)$
    - לכל קשת $(u,v) \notin P$: $f'(u,v) = 0$.
  - עדכן את הזרימה $f \leftarrow f + f'$ ובנה רשת שיורית N_f.
- החזר את f.

<u>ניתוח זמן ריצה:</u>

בנית הרשת השיורית $O(|E|)$.

חיפוש מסלול P $O(|E|)$.

עדכון הזרימה $O(|E|)$.

כמה איטרציות יהיו? (מ-CLRS תרגום האוניברסיטה הפתוחה)

<u>משפט:</u> אם מריצים את האלגוריתם אדמונדס קארפ על רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s ובור t , אזי המספר הכולל של שיפורי הזרימה שמבצע האלגוריתם הוא לכל היותר $O(|VE|)$.

<u>טענת עזר:</u> אם מריצים את האלגוריתם אדמונדס קארפ על רשת זרימה $G = (V, E)$ עם מקור s ובור t , אזי עבור כל הקודקודים $v \in V - \{s, t\}$, מרחק המסלול הקצר ביותר $\delta_f(s, v)$ ברשת השיורית G_f גדל מונוטונית עם כל שיפור של הזרימה.

הוכחה: <u>תקראו ותבינו לבד</u>.

נניח בשלילה כי עבור קודקוד מסוים $v \in V - \{s,t\}$, קיים שיפור של הזרימה הגורם ל-$\delta_f(s,v)$ לקטון.

תהי f זרימה ממש לפני השיפור ותהי f' זרימה מיד אחריו, אזי

$$\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$$

בה"כ ניתן להניח כי $\delta_{f'}(s,v) \le \delta_{f'}(s,u)$ לכל $u \in V - \{s,t\}$

שעבורם מתקיים $\delta_{f'}(s,u) < \delta_f(s,u)$. באופן שקול, ניתן להניח כי לכל הקודקודים $u \in V - \{s,t\}$ מתקיים:

$$\delta_{f'}(s,u) < \delta_{f'}(s,v) \Longrightarrow \delta_f(s,u) \le \delta_{f'}(s,u) \qquad (*)$$

עתה ניקח מסלול קצר מן הצורה $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$, ונתבונן בקודקוד u, הקודם של v על מסלול זה. בהכרח מתקיים $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$ (שכן (u,v) היא קשת על המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v). לכן, אפשר להניח מ-(*) ש- $\delta_f(s,u) \le \delta_{f'}(s,u)$.

נתבונן בזרימה נטו f מ-u אל v לפני שיפור הזרימה ב- G_f. אם $f(u,v) < c(u,v)$ אזי

$$\delta_f(s,v) \le \delta_f(s,u) + 1 \le \delta_{f'}(s,u) + 1 \le \delta_{f'}(s,v)$$

סתירה (ששיפור הזרימה מקטין את המרחק מ-s אל v)

לכן בהכרח מתקיים $f(u,v) = c(u,v)$, וזה אומר ש- $(u,v) \notin E_f$. כעת, מסלול השיפור P שנבחר ב-G_f, כדי לעצור את G_f, *חייב להכיל את קשת* (u,v) *בכיוון מ-v אל u* שכן $(u,v) \in E_f$, (על פי ההנחה) ו- $(u,v) \notin E_f$ כפי שהראנו זה עתה. כלומר, שיפור הזרימה דרך מסלול P גורם לדחיפת הזרימה *חזרה* דרך (u,v) ו-v מופיע לפני u על P. מאחר שP הוא המסלול הקצר ביותר מ-s אל t אז גם תת המסלולים שלו הם הקצרים ביותר ולכן $\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$ ולכן:

$$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \le \delta_{f'}(s,u) - 1 \le \delta_{f'}(s,v) - 2 < \delta_{f'}(s,v)$$

בסתירה להנחתנו ההתחלתית.

הוכחה אלטרנטיבית:

<u>טענת עזר:</u> אם מריצים את האלגוריתם אדמונדס קארפ על רשת זרימה $G = (V,E)$ עם מקור s ובור t, אזי עבור כל הקודקודים $v \in V - \{t\}$, מרחק המסלול הקצר ביותר $\delta_f(s,v)$ ברשת השיורית G_f גדל מונוטונית עם כל שיפור של הזרימה.

<u>הוכחה:</u>

נשים לב שעבור קודקוד $s \in V$ ולכל זרימה f יתקיים כי $\delta_f(s,s) = 0$ ולכן הטענה נובעת מיידית.

נניח בשלילה כי עבור קודקוד מסוים $v \in V - \{s,t\}$, קיים שיפור של הזרימה הגורם ל-$\delta_f(s,v)$ לקטון.

תהי f זרימה ממש לפני השיפור ותהי f' זרימה מיד אחריו, אזי

$$(1)\ \delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$$

נבחר את הקודקוד $\{v = \arg_{x\in V} min\{\delta_{f'}(s,x) : \delta_{f'}(s,x) < \delta_f(s,x)\}$ (הקודקוד v בעל הערך המינימלי של $\delta_{f'}(s,v)$ שמתקיים את (1)).

ניתן להניח כי לכל הקודקודים $u \in V - \{t\}$ מתקיים:

$\delta_{f'}(s,u) < \delta_{f'}(s,v) \Rightarrow \delta_f(s,u) \leq \delta_{f'}(s,u)$ (2). (לפחות s מקיים את התנאי).

עתה ניקח מסלול קצר מן הצורה $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ (מסלול כזה קיים מכיוון שמ-(1) ניתן להסיק שהערך של $\delta_{f'}(s,v) < \infty$ לכן קיים מסלול בין s ל-v), ונתבונן בקודקוד u, הקודם של v על מסלול זה.

בהכרח מתקיים $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$ (3) (שכן (u,v) היא קשת על המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v). לכן, אפשר להניח מ-(2) ש- $\delta_f(s,u) \leq \delta_{f'}(s,u)$ (4).

אם $f(u,v) < c(u,v)$ אזי $(u,v) \in G_f$ כאשר G_f זאת הרשת השיורית עבור הזרימה f.

מכיוון ש-$(u,v) \in G_f$ אזי $\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1$ (5) (נכון עבור כל גרף מכיוון שיכול להיות שהמסלול הכי קצר מ-s ל-v לא עובר דרך הקשת (u,v)).

לכן מתקיים ש:

$$\delta_f(s,v) \leq_{(5)} \delta_f(s,u) + 1 \leq_{(4)} \delta_{f'}(s,u) + 1 =_{(3)} \delta_{f'}(s,v)$$

סתירה ל- (1).

לכן בהכרח מתקיים $f(u,v) = c(u,v)$, וזה אומר ש- $(v,u) \in E_f, (u,v) \notin E_f$. (מכיוון שהצלעות ברשת השיורית G_f מוגדרות $E_f = \{(u,v) : c_f(u,v) > 0\}$ כאשר:

$(c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$.

כדי שיתקיים ש-$(u,v) \in E_{f'}$ (על פי ההנחה שלנו) חייב שהמסלול השיפור P הנבחר ברשת השיורית G_f יכיל את הצלע (v,u), מכיוון שצריך להתקיים $c_{f'}(u,v) > 0$ (ככה מגדירים את הצלעות של הרשת השיורית $G_{f'}$), ו-f זאת הזרימה לפני f' (אחרת יתקיים כי $(u,v) \notin E_f$,).

מאחר ש- P זה המסלול הקצר ביותר הנבחר ברשת השיורית G_f ו -(v,u) זאת קשת במסלול P אזי $\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) + 1$ (6).

לכן:

$$\delta_f(s,v) =_{(6)} \delta_f(s,u) - 1 \leq_{(4)} \delta_{f'}(s,u) - 1 =_{(3)} \delta_{f'}(s,v) - 2$$

קיבלנו ש: $\delta_f(s,v) < \delta_{f'}(s,v)$ שזה סתירה ל(1).

<u>אינטואיציה לטענת העזר</u>: בכל מסלול שיפור P תהיה לפחות קשת אחת שעבורה $f(u,v)=c(u,v)$, קשת זו תמחק מהרשת השיורית ותופיע קשת הפוכה. המסלול הבא שבא תופיע קשת ההפוכה חייב להיות גדול ממש במספר הקשתות ממסלול P.

הוכחה: קשת (u,v) ברשת השיורית נקראת קשת **קריטית** במסלול שיפור P אם היא צוואר הבקבוק של P, ז"א, הקיבול של מסלול P הוא הקיבול של (u,v). לאחר ששיפרנו זרימה דרך מסלול השיפור, כל קשת קריטית נעלמת מן הרשת השיורית. יתר על כן, בכל מסלול שיפור חייבת להיות לפחות קשת קריטית אחת.

כמה פעמים יכולה קשת (u,v) להיות קשת קריטית במהלך ריצה של האלגוריתם?

אם $(u,v)\notin\{(s,x),(x,s),(t,x),(x,t)\in E: x\in V\}$:

בפעם הראשונה ש(u,v) היא קשת קריטית מתקיים:

$$(*)\qquad \delta_{\mathrm{f}}(\mathrm{s},\mathrm{v}) = \delta_f(s,u)+1$$

מרגע ששופרה הזרימה, הקשת (u,v) נעלמת מן הרשת השיורית. מתי הקשת תופיע שוב ברשת השיורית? רק אחרי שהקשת ההפוכה (v,u) תופיע באיזה מסלול שיפור. אם f' היא הזרימה ב-G כאשר נבחר מסלול שיפור זה אז:

$$\delta_{\mathrm{f'}}(\mathrm{s},\mathrm{u}) = \delta_{f'}(s,v)+1$$

לפי טענת העזר $\delta_{\mathrm{f}}(\mathrm{s},\mathrm{v}) \le \delta_{f'}(s,v)$ מקבלים:

$$\delta_{\mathrm{f'}}(\mathrm{s},\mathrm{u}) \underset{\text{מסלול קצר ביותר}}{=} \delta_{f'}(s,v)+1 \underset{\text{טענת העזר}}{\ge} \delta_f(s,v)+1 \underset{(*)}{=} \delta_f(s,u)+2$$

לכן, בפעם הבאה ש-(u,v) תופיע במסלול שיפור המרחק של u מין המקור גדל בלפחות 2.

u מתחיל במרחק של לפחות 0 מהמקור ועד שהוא הופך להיות בלתי ניתן להגעה מהמקור, מרחקו של u הוא V-2. לפיכך, (u,v) יכולה להפוך קריטית $O(|V|)$ פעמים לכל היותר.

אחרת $(\mathrm{u},\mathrm{v})\in\{(\mathrm{s},\mathrm{x}),(\mathrm{x},\mathrm{s}),(\mathrm{t},\mathrm{x}),(\mathrm{x},\mathrm{t})\in \mathrm{E}: \mathrm{x}\in \mathrm{V}\}$:

א) $(u,v)=(t,x)$ לא יכולה להיות קשת קריטית מכיוון שאנו לוקחים מסלול פשוט קצר ביותר בין s ל- t.

ב) $(u,v)=(x,t)$ יכולה להיות קשת קריטית פעם אחת לכל היותר מכיוון שכדי שניקה אותה בפעם הבאה היינו צריכים לקחת את $(v,u)=(t,x)$ שזה לא יתכן מהנימוק של א.

ג) $(u,v)=(s,x)$ יכולה להיות קשת קריטית פעם אחת לכל היותר מכיוון שכדי שניקה אותה בפעם הבאה היינו צריכים לקחת את $(v,u)=(x,s)$ שזה לא יתכן מהנימוק של א.

ד) $(u,v)=(x,s)$ לא יכולה להיות קשת קריטית מהנימוק של א.

בסה"כ כל קשת יכולה להפוך קריטית $O(|V|)$ לכל היותר.

יש $O(|E|)$ קשתות ולכן מספר הכולל של קשתות קריטיות הוא $O(|V||E|)$. בכל מסלול שיפור יש לפחות קשת קריטית אחת, ומכאן נובעת נכונות המשפט.

חלק ג'- משפט Hall:

<u>תזכורת</u>: גרף $G=(V,E)$ יקרא דו-חלקי אם הוא מקיים:

- $V=R\cup L$
- $R\cap L=\varnothing$
- $E\subseteq\{(u,v):(u\in R\wedge v\in L)\vee(u\in L\wedge v\in R)\}$ (קיימות קשתות בגרף רק **בין** הקבוצות R ו- L ולא בתוכן).

<u>הגדרה:</u> שידוך חוקי $M\subseteq E$ של גרף דו-חלקי $G=(R\cup L,E)$ יקרא **שידוך מושלם** אם $|M|=|L|=|R|$.

<u>משפט Hall:</u>

קיים שידוך מושלם בגרף דו חלקי G בו $|L|=|R|$ אם"ם לכל $A\subseteq L$ מתקיים $|A|\le|N(A)|$, כאשר $N(A)$ היא קבוצת השכנים של הקודקודים מהקבוצה A. (ניתן להגדיר סימטרית לגבי R).

<u>הוכחה:</u>

1. אם קיים שידוך מושלם אזי לכל $A\subseteq L$ $|A|\le|N(A)|$ – טריוויאלי.
2. אם לכל $A\subseteq L$ מתקיים $|A|\le|N(A)|$, אז קיים שידוך מושלם.

<u>הוכחת 2</u>: נתבונן ברשת הזרימה שמתקבלת מהרדוקציה לבעיית זרימה מקסימאלית בשלמים. אם נוכיח שהזרימה המקסימאלית היא בגודל $n=|L|$ נוכל להשתמש בטענה העולה מן הדוגמה הקודמת: "גודל שידוך מקסימאלי M שווה לגודל הזרימה המקסימאלית f^*", וסיימנו.

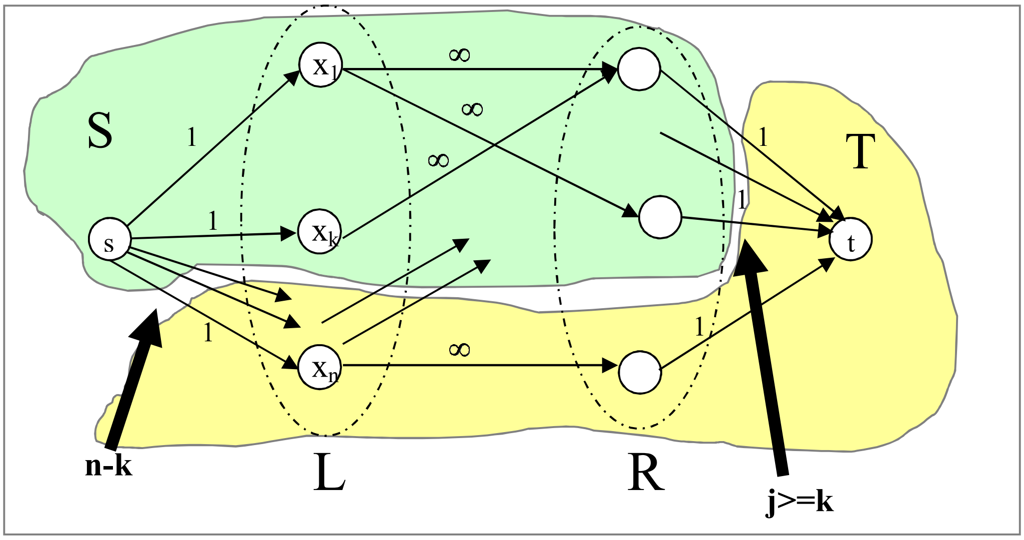
לפי משפט Min-Cut—Max-Flow, די להראות שחתך (S,T) מינימאלי בגרף הוא עם קיבולת n. ואכן:
ראשית, קיים חתך (S,T) עם קיבולת n (זה החתך שבו $S=\{s\}$) ולכן נותר להראות שהקיבול של כל חתך (S,T) אחר הוא לפחות n.

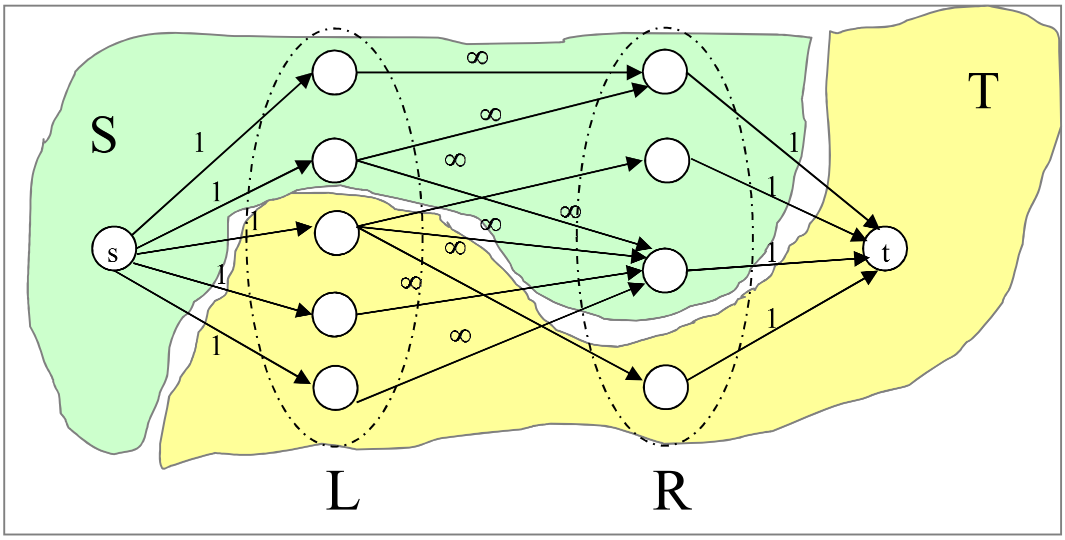
ואכן- נסתכל על חתך (S,T) כלשהו. אם יש עליו צלע עם קיבולת ∞ הרי בחתך הוא בוודאי עם קיבולת גדולה מ- n.
אחרת, כל הצלעות שחוצות את החתך הן בעלות קיבול סופי בלבד. נניח בה"כ כי:

$$S\cap L=\{x_1,x_2,...,x_k\}$$
$$T\cap L=\{x_{k+1},...,x_n\}$$
$$S\cap R=\{y_1,...,y_j\}$$
$$T\cap R=\{y_{j+1},...,y_n\}$$

נשים לב לכך שכל השכנים של $S\cap L=\{x_1,x_2,...,x_k\}$ חייבים להיות בקבוצה $S\cap R$, כי אחרת נקבל את קיומה של צלע עם קיבולת אינסופית החוצה את החתך (S,T).

הצלעות החותכות את החתך הן: (1) $n-k$ צלעות מ- s אל $T\cap L$. (2) j צלעות מ- $S\cap R$ ל- t.
מכיוון שלכל $A\subseteq L$ מתקיים $|N(A)|\geq|A|$, הרי שבפרט $k=|S\cap L|\leq|N(S\cap L)|\leq|S\cap R|=j$, כלומר $k\leq j$ וקיבולת החתך היא $C(S,T)=n-k+j\geq n$, כלומר לפחות n.
מ.ש.ל.





בדוגמא שלמעלה ניתן לראות חתך שלא קיימת בו אף קשת בקיבול ∞ אשר חוצה אותו, (מקבוצה S לקבוצה T). יחד עם זאת, ברור כי לא קיים בגרף זה שידוך מושלם, שכן מספר הקודקודים בקבוצות L ו- R אינו שווה ($|N(L)|<|L|$).