תכנון אלגוריתמים 202-1-2041
סמסטר ב׳ תשע״ד
מועד א -- 27.8.2014
פיתרון

שאלה 1

סעיף א

נכון.

כל תת-גרף $H|_{F_i}$ מהווה עץ פורש של $G|_{F_i}$ ולכן קיבלנו $|E_H \cap E(G|_{F_i})| = |V_i| - 1$. מכיוון ש-$H$ גם מהווה עץ פורש של G, ו-$B, E(G|_{F_1}), \dots, E(G|_{F_r})$ מהווה חלוקה של V, קיבלנו

$$|V|-1 = |E_H| = |E_H \cap B| + \sum_{i=1}^{r} |E_H \cap E(G|_{F_i})| = |E_H \cap B| + \sum_{i=1}^{r} (|V_i|-1) = |E_H \cap B| + |V| - r$$

ומכאן הטענה נובעת.

סעיף ב

לא נכון.

דוגמא: יהי $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ כאשר הצמתים מחולקים ל- $F_1 = \{v_1\}, F_2 = \{v_2, v_3\}$, והצלעות עם משקלים $w(v_1, v_2) = w(v_1, v_3) = 1$ ו- $w(v_2, v_3) = 2$. אזי עפ״מ יחיד הוא $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$, והאלגוריתם יחזיר את כל הגרף (משולש, ולכן לא עץ).

סעיף ג

נכון.

לפי ההגדרה, $H|_{F_i}$ חייב להיות עץ פורש של $G|_{F_i}$. נניח בשלילה שקיים עץ פורש T_i של $G|_{F_i}$ עם משקל יותר נמוך. אזי ניתן לקבל פיתרון עם משקל יותר נמוך $H' = (V, E(H) \setminus E(H|_{F_i}) \cup E(T_i))$.

כדי להראות חוקיות, כיוון שמספר הצלעות נשמר, מספיק להראות ש-H' קשיר. ובכן, בכל מסלול בין שני קודקודים ב-H, אפשר להלחיף את הקטעים שבתוך $G|_{F_i}$ במסלולים בעץ T_i, כי T_i עץ פורש.

שאלה 2

הערה: נשים לב שקיים כוכב מושרה בגודל לפחות k אם״ם קיים כוכב מושרה בגודל בדיוק k. כנ״ל לגבי קבוצה בלתי תלויה.

:STAR $\in$ NP

נראה אלגוריתם אימות פשוט:

האלגוריתם יקבל כקלט את הקלט המקורי G, k, ועד $w = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$.

1. נבדוק שהעד מכיל k צמתים, ושכל v_i שייך ל-V. נתחזק מערך A מאותחל ל-0, ולכל צומת בעד נסמן $A[v_i] \leftarrow 1$ (אם יש כפילויות נעצור ונחזיר לא).
2. לכל $i = 1, \dots, k-1$, נבדוק שאכן $(v_0, v_i) \in E$.
3. לכל $i = 1, \dots, k-1$, נעבור על כל השכנים u של v_i, ואם $u \neq v_0$ ו-$A[u] = 1$, נעצור ונחזיר לא.
4. נחזיר כן.

קל לראות שהאלגוריתם בודק האם w מהווה כוכב מושרה בגודל k ב-G, וקיים עד w שהאלג׳ יקבל אם״ם $(G, k) \in$ STAR.

זמן הריצה: $O(|V| + |E|)$.

STAR היא NP-קשה: נראה רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.
רדוקציה: בהינתן (G,k), נבנה גרף חדש $G'=(V',E')$ כך ש- $V'=V\cup\{v_0\}$ (עבור $v_0\notin V$), ו- $E'=E\cup\{(v_0,v)\mid v\in V\}$, ונחזיר (G',k') עבור $k'=k+1$.

צ״ל: $(G',k')\in$ STAR $\Leftrightarrow (G,k)\in$ Independent Set

$\Rightarrow$: תהי $S=\{v_1,\ldots,v_k\}\subseteq V$ קב״ת ב-G בגודל k. לפי הגדרת E', לכל $v_i\in S$, (v_0,v_i) צלע ב-E'. כמו כן, בין כל שני צמתים ב-S אין צלע ב-E (כי S קב״ת) וגם לא ב-E' (כי לא הוספנו צלעות בין צמתי V). לכן, $G'|_{S\cup\{v_0\}}$ הוא כוכב מושרה בעל $k'=k+1$ צמתים, ומכאן ש- $(G',k')\in$ STAR.

$\Leftarrow$: תהי $S'=\{u_0,u_1,\ldots,u_k\}\subseteq V'$ קבוצת צמתים בגודל $k+1$ כך ש- $G'|_{S'}$ כוכב מושרה בגודל $k'=k+1$ עם צומת מרכזי u_0 (כלומר אין צלעות בין $u_1,\ldots,u_k$, ו-u_0 מחובר לשאר הצמתים ב-S'). נניח בה״כ כי $k>1$ (אם $k=1$ זה טריוויאלי, כי כל צומת מהווה קב״ת בגודל $k=1$). תחת הנחה זאת נוכיח:
<u>טענה</u>: לכל $i=1,\ldots,k$ מתקיים $u_i\in V$.
הוכחה: נניח בשלילה ש- $u_i=v_0$ עבור $i\in\{1,\ldots,k\}$. אבל אז קיים $j\in\{1,\ldots,k\}\setminus\{i\}$ (כי $k>1$) כך שאין צלע בין v_i ל-v_j, בסתירה להגדרת G', שם יש צלע בין v_0 לכל שאר הצמתים. $\square$
לפי הנתון, לכל שני צמתים $u,v\in\{u_1,\ldots,u_k\}$, אין צלע בין u ו-v בגרף G'. יתר על כן, לפי הטענה, $u,v\in V$, ולכן גם אין צלע בין u ו-v בגרף G (כי לא הוספנו צלעות בין צמתי V). מכאן ש-$\{v_1,\ldots,v_k\}$ מהווה קב״ת ב-G בגודל k ולכן $(G,k)\in$ Independent Set.

שאלה 3

סעיף א

אלגוריתם

1. נגדיר רשת שכבות N עם אותו הגרף G, ואותם קודקודי מקור ויעד s,t, כאשר לכל הצלעות ניתן קיבול 1 (ולזוג סדור שאינו צלע ניתן קיבול 0 לפי הגדרה).
2. נריץ את האלג׳ של דיניץ ונמצא זרימה מקסימלית f.
3. תהי N_f הרשת השיורית המתקבלת ברשת N מהזרימה f שנמצאה בצעד הקודם.
4. בגרף G_f המוגדר ע״י N_f נריץ BFS מ-s, ונשמור את כל הצמתים שהתגלו בקבוצה S (כל הצמתים שנגישים מ-s ב-G_f).
5. נגדיר $T=V\setminus S$ ולכל צלע $(u,v)\in E$, נוסיף את הצלע לפיתרון אם״ם $u\in S$ ו-$v\in T$. במילים אחרות, נחזיר את $F_{\text{ALG}}=\{(u,v)\in E\mid u\in S,v\in T\}$.

זמן ריצה

צעדים 1,3,4,5 כולם דורשים זמן $O(|V|+|E|)$ למעבר על כל הצלעות, או ביצוע BFS (ניתן גם להשיג זמן $O(|E|)$ אם נבצע BFS מ-s בתחילת האלגוריתם ונתעלם מצמתים שלא התגלו). צעד 2 דורש זמן $O(|E|^{3/2})$ כפי שהוכח בתרגול עבור האלגוריתם של דיניץ עם קיבולים אחידים. סה״כ $O(|V|+|E|^{3/2})$ (התשובה $O(|E|^{3/2})$ גם קבילה).

הוכחת נכונות

לפי מה שהוכח בכיתה, האלגוריתם מחזיר חתך (S,T) כך ש- $s \in S$ ו-$t \in T$, ובין כל החתכים מסוג זה, החתך שהוחזר הוא בעל קיבול מינימלי. יהי $H_{\mathsf{ALG}} = (V, E \setminus F_{\mathsf{ALG}})$.

חוקיות:

נניח בשלילה שקיים מסלול מ-s ל-t ב-H_{ALG}. מכיוון שהמסלול מתחיל ב-S (כי $s \in S$) ונגמר ב-T (כי $t \in T$), המסלול חייב להכיל צלע (u,v) כך ש-$u \in S$ ו-$v \in T$. אבל אז $(u,v) \in F$ בסתירה להגדרת H_{ALG}.

מינימליות:

תהי $F' \subseteq E$ קבוצת צלעות כך שבגרף $H' = (V, E \setminus F')$ אין מסלול מ-s ל-t. צ״ל: $|F_{\mathsf{ALG}}| \le |F'|$.
ובכן, עבור הגרף H' הנ״ל, נגדיר $S' = \{u \mid H'$-קיים מסלול מ-s ל-u ב$\}$, ונגדיר $T' = V \setminus S'$. לפי בחירת F' והגדרת S', מתקיים $s \in S'$ ו-$t \in T'$.
<u>טענה</u>: לכל צלע $(u,v) \in E$ שחוצה את החתך (S',T') (כלומר, $u \in S'$ ו-$v \in T'$), מתקיים $(u,v) \in F'$.
הוכחה: נניח בשלילה שקיימת צלע כזו כך ש-$(u,v) \notin F'$. אז הצלע שייכת לגרף H'. כיוון ש-$u \in S'$ קיים מסלול p מ-s ל-u ב-H', אבל אז ניתן להוסיף את הצלע (u,v) למסלול ולקבל מסלול $p \circ (u,v)$ מ-s ל-v ב-H', בסתירה לכך ש-$t \notin S'$. □
לפי הטענה, מתקיים $E(S',T') \subseteq F'$, ומכיוון שקיבולי כל הצלעות הם 1, ו-(S,T) חתך $s-t$ מינימלי (וגם (S',T') חתך $s-t$), מתקיים

$$|F_{\mathsf{ALG}}| = c(F_{\mathsf{ALG}}) = c(S,T) \le c(S',T') = |E(S',T')| \le |F'|.$$

סעיף ב

אלגוריתם

1. נבנה את רשת הזרימה N כפי שהוגדרה באלגוריתם בסעיף א.
2. נבנה את רשת השכבות L כמו באלגוריתם של דיניץ.
3. נבצע איטרציה אחת של האלגוריתם של דיניץ בה נמצא זרימה חוסמת f ברשת השכבות L.
4. נמצא חתך מינימלי ברשת השכבות: נריץ את צעדים 3-5 מהאלגוריתם בסעיף א, כאשר האלגוריתם מתבצע <u>על רשת השכבות L בלבד</u> (בפרט, בשלב החזרת הצלעות החוצות את החתך, נבחר את הצלעות מתוך צלעות השייכות ל-L).

זמן ריצה

כמו בסעיף הקודם, כל הצעדים פרט למציאת זרימה לוקחים זמן $O(|V|+|E|)$. איטרציה אחת של האלגוריתם של דיניץ לוקחת זמן $O(|E|)$ כאשר כל הקיבולים הם 1 (כפי שנלמד בתרגול). לכן, זמן הריצה הכולל הינו $O(|V|+|E|)$.

שאלה 4

סעיף א

לא נכון.

דוגמא נגדית: נגדיר גרף $G=(V,E)$ עם צמתים $V=\{s,v_1,v_2,v_3,v_4\}$ וצלעות מכוונות $E=\{(s,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(s,v_2)\}$, שבו משקל כל צלע הוא 1. אזי סדר הפעולות

$$\mathsf{Relax}(s,v_1), \mathsf{Relax}(v_1,v_2), \mathsf{Relax}(v_2,v_3), \mathsf{Relax}(s,v_2), \mathsf{Relax}(v_3,v_4)$$

יסתיים במצב בו אין מסלול מ-s ל-v_4 המקיים את הדרישה. בפרט, ערכי $d[]$ יהיו:

$$d[s]=0, d[v_1]=1, d[v_2]=1, d[v_3]=3, d[v_4]=4.$$

סעיף ב

נכון.

לפי הטענה המופיעה בגוף השאלה, ניתן לשייך לכל איטרציה מסלול פשוט מ-s לקודקוד השני בצלע עליה ביצענו Relax. מסלולים אלה לא יחזרו על עצמם, משום שאם מדובר בשתי צלעות $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ עם $v_1 \neq v_2$ אזי המסלולים מסתיימים בצמתים שונים, ועבור אותו צומת v, כל פעולת Relax תוריד את הערך $d[v]$, ולכן זה לא יתאים לאותו מסלול. חסם עליון על מספר המסלולים הפשוטים היוצאים מ-s: ישנן $(|V|-1)!$ תמורות של $V \setminus \{s\}$, ולכל אחת יש $|V|$ רישות. סה״כ $|V| \cdot (|V|-1)! = |V|!$.

סעיף ג

לא נכון.

יהי $G = (V, E)$ גרף עם משקלים אי-שליליים w בו יש ריצה של האלגוריתם הגנרי עם לפחות $|V|+2$ איטרציות (לדוגמא, הגרף מסעיף א). נגדיר גרף חדש $G' = (V \cup \{s'\}, E \cup \{(s', v) \mid v \in V\})$ בו לכל צלע $e \in E$ ניתן משקל $w_1(e) = w(e)$, ולחדשות ניתן משקל $W = |V| \cdot \text{max}_{e \in E}\, w(e)$. אזי לפי משקל w_1 המקי״ב לכל צומת $v \in V$ יהיה הצלע (s, v). עכשיו נגדיר $w_2(s', s) = 0$. לאחר שינוי זה, הריצה הנוספת תהיה כמו הריצה המקורית על G, בה יהיו לפחות $|V|+2 > |V \cup \{s'\}|$ איטרציות.

סעיף ד

לא נכון.

נגדיר גרף $G = (V, E)$ עם צמתים $V = \{s, u, v\}$ וצלעות עם משקולות $w(s, u) = w(u, v) = 8$ ו-$w(s, v) = 20$. אזי האלג׳ הגנרי עם השינוי ייתן עץ מק״ב $\{(s, u), (u, v)\}$, ועץ מק״ב עבור המשקולות w' הוא $\{(s, u), (s, v)\}$.