<u>תרגול מספר 7 – סריקה לעומק, מיון טופולוגי, רכיבים קשירים היטב</u>

DFS(*G*)
For each vertex $u \in V[G]$
    $color[u] = WHITE$
    $\pi[u] \leftarrow \text{NIL}$
$time \leftarrow 0$
For each vertex $u \in V[G]$
    If $color[u] = WHITE$ then
        DFS-VISIT(u)

DFS-VISIT(u)
$color[u] \leftarrow GRAY$
$time \leftarrow time + 1$
$d[u] \leftarrow time$
For each vertex $v \in Adj[u]$
    If $color[v] = WHITE$ then
        $\pi[v] \leftarrow u$
        DFS-VISIT(v)
$color[u] \leftarrow BLACK$
$f[u] \leftarrow time \leftarrow time + 1$

TOPOLOGICAL-SORT(G)
Call *DFS(G)* to compute finishing times $f[v]$ for each vertex *v*.
If no back edge has been discovered during the *DFS* procedure, then return $\langle v_{i_1},...,v_{i_n} \rangle$ where $f[v_{i_1}] > ... > f[v_{i_n}]$.
Else return “*G* is a cyclic graph!”.

תזכורת: סריקת DFS על גרף מכוון מסווגת את קשתות הגרף לקשתות עץ, אחורה, קדימה וחוצות. סריקת DFS על גרף **לא** מכוון מסווגת את קשתות הגרף לקשתות עץ וקשתות אחורה.

<u>תרגיל לחימום:</u>

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ וקודקוד $v \in V$, כך <u>שבכל</u> מיון טופולוגי של קודקודי הגרף *v* הוא הקודקוד האחרון במיון. מה ניתן לומר על *v*?

<u>תשובה</u>:

א. לכל $u \in V$, קיים מסלול מ-*u* ל-*v* ב-*G*.
ב. לכל $u \in V$, לא קיים מסלול מ-*v* ל-*u* ב-*G*.

<u>הוכחה</u>:

א. נניח בשלילה כי קיים קודקוד *u* כך שאין מסלול מ-*u* ל-*v* ב-*G*. נתבונן במיון טופולוגי המבוסס על סריקת DFS המתחילה ב-*u*. בסריקה זו *u* יצבע בשחור לפני גילוי *v*, ובפרט לפני צביעת *v* בשחור, כלומר $f[u] < f[v]$ ולכן *u* יופיע לאחר *v* במיון הטופולוגי- סתירה.

ב. נניח בשלילה כי קיים קודקוד *u* כך שיש מסלול מ-*v* ל-*u* ב-*G*. נתבונן במיון טופולוגי המבוסס על סריקת DFS המתחילה ב-*v*. בסריקה זו *u* יצבע בשחור לפני צביעת *v* בשחור, כלומר $f[u] < f[v]$ ולכן *u* יופיע לאחר *v* במיון הטופולוגי- סתירה.

בעיית הכיתה המופרעת:

בכיתה מסוימת נוהגים התלמידים להשליך מטוסי נייר אחד על השני. לכל תלמיד קיימת קבוצה של תלמידים עליהם הוא משליך מטוסים (משאר התלמידים הוא מפחד, ולא רוצה להסתבך איתם), במידה והשורה בה יושב התלמיד המשליך רחוקה יותר מהלוח מאשר השורה בה יושבת מטרתו או ששניהם יושבים באותה השורה.

סידור חוקי של תלמידי הכיתה הוא הושבה של התלמידים באופן כזה בו אף מטוס לא יושלך במהלך השיעור. **סידור אופטימאלי** הוא סידור חוקי בעל מספר מינימאלי של שורות.

הערה: ניתן להניח ששורות הכיתה אינן מוגבלות במספר מקומות ישיבה.

בהינתן מופע לבעיה, נרצה לענות על שתי השאלות:

- האם קיים סידור חוקי של תלמידי הכיתה? (בעיית החוקיות, או פיסיביליות)
- במידה וקיים סידור חוקי, מהו הסידור האופטימאלי? (בעיית האופטימיזציה)

הציעו אלגוריתם לפתרון בעיית קיום סידור חוקי, ובעיית מציאת סידור אופטימאלי.

את בעיה זו נפתור ע"י שימוש במושגים מתורת הגרפים.
נתאר את הכיתה על ידי הגרף המכוון $G=(V,E)$, כאשר V היא קבוצת התלמידים בכיתה, וקיימת צלע (מכוונת) $(u,v)\in E$ אם התלמיד u ישליך מטוסים על התלמיד v (במידה ו- v ישב לפני u או באותה השורה שלו).
הבהרה: נשתמש באותם השמות עבור תלמידים וקודקודים, כאשר קודקוד x הוא הקודקוד המתאים לתלמיד x.

פתרון בעיית קיום סידור חוקי:

- נריץ את האלגוריתם למיון טופולוגי על G.
- אם ניתן למיין את קודקודי G, אזי התשובה לבעיה היא "כן", אחרת התשובה היא "לא".

הוכחת נכונות הפתרון:

- אם ניתן למיין את קודקודי G לפי מיון טופולוגי, אזי נושיב את תלמדי הכיתה באופן הבא: בכל שורה ישב תלמיד יחיד, כך שבשורה הראשונה מהלוח ישב התלמיד המיוצג ע"י הקודקוד הראשון במיון, בשורה השנייה מהלוח התלמיד המיוצג ע"י הקודקוד השני במיון, וכן הלאה. אם תלמיד א' יכול לזרוק מטוס על תלמיד ב', אזי קיימת צלע מכוונת בגרף מקודקוד א' לעבר קודקוד ב', ולכן קודקוד א' מופיע במיון לפני קודקוד ב', ומכאן תלמיד א' ישב לפני תלמיד ב' ולא יוכל לזרוק עליו מטוסים.

- אם לא קיים מיון טופולוגי, אזי בהכרח קיים מעגל בגרף, נסמנו ב - $C=\{(v_i,v_{i+1})\,|\,1\le i<k\}\cup\{(v_k,v_1)\}$. נניח בשלילה כי ניתן להושיב את התלמידים כך שלא יזרקו מטוסים אחד על השני. התלמיד v_i חייב לשבת לפני התלמיד v_{i+1} עבור כל $1\le i<k$ (אחרת ישליך עליו מטוסים). אך v_k חייב לשבת לפני v_1 - סתירה.

<u>פתרון בעיית האופטימיזציה:</u>

- נריץ את האלגוריתם למיון טופולוגי על *G*.

במידה וקיים מיון טופולוגי לקודקודי הגרף, נושיב את התלמידים באופן הבא:

  - נאתחל $line[v] \leftarrow 1$ לכל קודקוד *v* בגרף.
  - נעבור על כל קודקוד *v* בגרף לפי סדר ההופעה במיון ונבצע:
    - לכל $(v,u) \in E$ נעדכן $line[u] \leftarrow \max\{line[u], line[v]+1\}$.
  - סיום: נושיב כל תלמיד *x* בשורה $line[x]$ (כאשר השורות נספרות החל מהשורה הקרובה ללוח).

<u>הוכחת נכונות</u>:

<u>טענה עיקרית</u>: הסידור המוחזר ע"י האלגוריתם הוא סידור חוקי בעל מספר שורות מינימאלי.

<u>הוכחת חוקיות הפתרון:</u>

כדי להראות שהפתרון המוחזר חוקי, עלינו להראות שאם תלמיד *v* יכול לזרוק מטוסים על תלמיד *u*, אזי הושבנו את תלמיד *v* לפני תלמיד *u*.

<u>אבחנה 1</u>: האלגוריתם יכול לעדכן את ערך השדה $line[u]$ עבור קודקוד *u* כלשהו רק כאשר נבחנת צלע (v,u) הנכנסת ל- *u*, ולכן לאחר שהאלגוריתם יעבור על כל הקודקודים המופיעים לפני *u* בסידור הטופולוגי לא יתבצעו שינוים בערך השדה $line[u]$ (כיוון שמכל הקודקודים החל מ-*u* בסידור הטופולוגי לא יוצאות צלעות ל- *u*).

<u>אבחנה 2</u>: כל שינוי בערך השדה $line[u]$ עבור קודקוד *u* כלשהו יכול רק להגדיל את ערכו.

<u>הוכחת החוקיות</u>: יהיו v,u שני תלמידים. נשים לב כי אם תלמיד *v* יכול לזרוק מטוסים על תלמיד *u*, אזי קיימת בגרף צלע (v,u), ולכן קודקוד *v* מופיע במיון לפני קודקוד *u*. לפי אבחנה 1, לאחר שהאלגוריתם יבחן את כל הקודקודים המופיעים לפני *v* במיון, ערך השדה $line[v]$ יישאר קבוע. בנוסף, בשלב בחינת *v* השדה $line[u]$ יקבל ערך של לפחות $line[v]+1$, ולפי אבחנה 2 ערך זה יכול רק לגדול. לכן בהכרח בסיום ריצת האלגוריתם $line[u] > line[v]$, והסידור המוחזר אכן חוקי.

<u>הוכחת אופטימאליות הפתרון:</u>

<u>טענת עזר</u>: לכל תלמיד *v*, ולכל פתרון חוקי המושיב את תלמיד *v* בשורה *l* מתקיים $line[v] \le l$.

<u>הוכחת האופטימאליות</u>: יהי *L* מספר השורות בהן הושיב האלגוריתם את התלמידים, ויהי *v* תלמיד המקיים $line[v] = L$. לפי טענת העזר, עבור כל סידור חוקי בו יושב *v* בשורה *l* כלשהי, מתקיים $L \le l$. מכך עולה כי בכל סידור חוקי התלמידים יושבים בלכל הפחות *L* שורות, ולכן האלגוריתם החזיר פתרון אופטימאלי.

<u>הוכחת טענת העזר</u>:
באינדוקציה שלמה על הקודקודים לפי סדר הופעתם במיון הטופולוגי.

<u>בסיס:</u> עבור v_1 הקודקוד הראשון בסידור הטופולוגי- האלגוריתם מאתחל $line[v_1] \leftarrow 1$ ולפי אבחנה 1 לא משתנה ערך זה בהמשך הריצה. מכיוון שבכל סידור חוקי v_1 יושב בשורה כלשהי $1 \leq$ הטענה מתקיימת.
<u>הנחה:</u> נניח כי הטענה מתקיימת עבור כל קודקוד המופיע לפני הקודקוד v_k בסידור, ונוכיח עבור v_k.

<u>צעד:</u> יהי *P* סידור חוקי כלשהו אשר מושיב את v_k בשורה l_k . נראה כי $line[v_k] \leq l_k$.
נחלק לשני מקרים:

- לא קיימת צלע נכנסת ל- v_k מקודקוד כלשהו בגרף. לכן, השלב היחידי באלגוריתם בו יוכנס ערך ל-$line[v_k]$ הוא שלב האתחול, וערך זה הוא 1. לכן בהכרח $1 = line[v_k] \leq l_k$.
- קיימת צלע נכנסת ל- v_k מקודקוד כלשהו בגרף. נסמן ב-v' את קודקוד ממנו יוצאת צלע ל- v_k כך שערך $line[v']$ מקסימאלי. כלומר: $v' = \arg\max_{v_j \in V} \{line[v_j] : (v_j, v_k) \in E\}$.

האלגוריתם מחשב את ערך $line[v_k]$ ע"י בחירת הערך המקסימאלי מבין כל ערכי $line[v]+1$ עבור כל קודקוד v ממנו יוצאת צלע ל- v_k, ולכן מתקיים כי בסוף האלגוריתם $line[v_k] = line[v']+1$ [1]. נסמן ב-l' את השורה בה יושב v' ב-*P*. כיוון ש-v' מופיע בהכרח לפני v_k בסידור הטופולוגי אזי $l' < l_k$ [2], ומהנחת האינדוקציה נובע כי $line[v'] \leq l'$ [3]. מכאן נובע כי $line[v_k] \underset{[1]}{=} line[v']+1 \underset{[3]}{\leq} l'+1 \underset{[2]}{\leq} l_k$.

<u>* שאלה למחשבה</u>: במידה וקיים סידור חוקי של תלמידי הכיתה, האם הוא בהכרח יחיד?

<u>רכיבים קשירים היטב בגרף מכוון</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. נגדיר את היחס R על קבוצת קודקודי הגרף המסמל "קשירות חזקה" באופן הבא: $(x,y)\in R$ אם קיים מסלול מ-x ל-y וגם קיים מסלול מ-y ל-x בגרף G.
ניתן להראות (בקלות) כי יחס זה הוא רפלקסיבי (אם מגדירים מסלול באורך 0 כמסלול מקודקוד לעצמו), טרנזיטיבי וסימטרי, ולכן יחס שקילות.

*<u>תזכורת</u>:

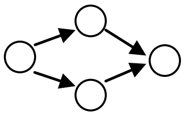
- <u>חלוקה</u> של קבוצה היא פרוק של הקבוצה לתת קבוצות <u>זרות</u> שאיחודן הוא הקבוצה כולה.
- יחס שקילות על קבוצה מגדיר חלוקה שלה, כך שכל תת קבוצה בחלוקה נקראת <u>מחלקת שקילות</u>, כל שני איברים באותה מחלקת שקילות עומדים ביחס, ואילו כל שני איברים ממחלקות שקילות שונות אינם עומדים ביחס.

במקרה זה, R מגדיר חלוקה של V. כל מחלקת שקילות של היחס R נקראת "**רכיב קשיר היטב**" של הגרף G, כאשר המשמעות היא שמכל קודקוד ברכיב קשיר היטב קיים מסלול לכל קודקוד אחר באותו הרכיב.

הערה: בגרף מכוון, אין משמעות למושג קשירות שראינו בגרפים לא מכוונים אלא רק לקשירות היטב. למשל, בגרף הבא

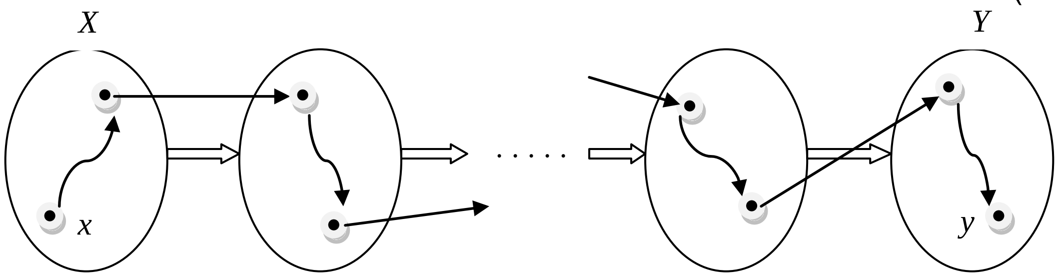
אין משמעות למשפט "הקודקודים הקיצונים קשירים", לעומת זאת, ניתן להגיד ש**בגרף התשתית** המתאים, כלומר, בגרף המתקבל אחרי הורדת הכיוונים של הקשתות, "הקודקודים הקיצונים קשירים".

עתה נגדיר את <u>גרף הרכיבים קשירים היטב של הגרף G</u> – G^{SCC} (גרף מכוון):
קודקודי G^{SCC} הם הרכיבים הקשירים היטב של G (מחלקות השקילות של היחס R).
קיימת צלע מקודקוד X לקודקוד Y ב-G^{SCC} אם קיים קודקוד x ב-G ברכיב המתאים ל-X וקודקוד y ברכיב המתאים ל-Y, כך שיש צלע מ-x ל-y ב-G.
באופן כללי, גרף רכיבי הקשירות G^{SCC} הוא גרף מכוון חסר מעגלים, אך לא בהכרח עץ. הגרף הבא יתכן:



<u>טענה 1</u>: אם קיים ב- G^{SCC} מסלול מרכיב X לרכיב Y אזי קיים ב- G מסלול מכל קודקוד x ברכיב X לכל קודקוד y ברכיב Y.

<u>הסבר</u> (בציור):



<u>הערה</u>: טענה 1 נכונה גם בכיוון ההפוך. נמקו !

<u>טענה 2</u>: הגרף G^{SCC} הוא גרף חסר מעגלים.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי קיים מעגל, ויהיו X ו-Y שני קודקודים שונים הנמצאים על המעגל. יהיו x ו-y קודקודים כלשהם מהרכיבים המתאימים ל-X ו-Y ב-G בהתאמה. לפי ההנחה יש מסלול ב- G^{SCC} מ-X ל-Y ולהיפך, ולכן, לפי טענה 1, יש מסלול ב-G מ-x אל y ולהיפך. אזי x ו-y הם באותו רכיב קשירות, בסתירה לעובדה ש X ו-Y הם רכיבים שונים.

<u>בעיה (לקוחה ממועד א 2000)</u>:

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון, שבו לכל קודקוד $u \in V$ מותאם מספר rating(u). נגדיר פונקציה:

$\text{best}(u) = \max\{\text{rating}(v) : v \in V,$ קיים מסלול מ-u ל-v ב-$G$$\}$

הראו כיצד ניתן לחשב בזמן ליניארי את $\text{best}(u)$ לכל $u \in V$ עבור א. גרף חסר מעגלים, ב. עבור גרף כללי.

<u>א. G חסר מעגלים</u>

<u>רעיון</u>: נמיין את G מיון טופולוגי (**"גרף מכוון חסר מעגלים ⇐ קיים מיון טופולוגי"**), ואז נעדכן מהסוף להתחלה את שדות ה-best של הקדקודים.

<u>האלגוריתם</u>:

1. אתחול: לכל קודקוד u נבצע: best(u) ← rating(u)
2. נבצע מיון טופולוגי לקודקודי G.
3. נעבור על רשימת הקדקודים הממוינת בסדר הפוך למיון הטופולוגי (כלומר, נתחיל מקדקוד ללא צלעות יוצאות), ולכל קדקוד u נבצע:
   לכל v שכן של u ((u,v) צלע בגרף) נבצע:
   אם best(v) < best(u) אז נעדכן best(u) ← best(v).

<u>הסבר על נכונות האלגוריתם</u>:

כל פעם שנגיע לטפל בקדקוד חדש u בצעד 3 באלגוריתם, ערכי best(v) לכל v שאחרי u במיון הטופולוגי נכונים. ההוכחה באינדוקציה ונובעת מנכונות המיון הטופולוגי (לא קיים מסלול מ-u לקדקוד שקודם לו במיון הטופולוגי ולכן לא יכול לתרום לערך ה- best של u – ובאלגוריתם אנו מעדכנים את השדות של הקודקודים לפי סידורם במיון הטופולוגי מהסוף להתחלה).

ניתוח זמן ריצה:
1. אתחול: $O(|V|)$.
2. מיון טופולוגי: $O(|V|+|E|)$.
3. בשלב האחרון עוברים בדיוק פעם אחת על כל קודקוד בגרף ופעם אחת על כל צלע בגרף, ולכן $O(|V|+|E|)$.

בסך הכל, זמן הריצה הוא $O(|V|+|E|)$.

ב. G גרף כללי

בסעיף זה מותר לנו להשתמש באלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב בגרף מכוון, ובעובדה שגרף הרכיבים הוא חסר מעגלים.

רעיון: נמצא את גרף הרכיבים קשירים היטב של G. כעת יהיה לנו גרף חסר מעגלים ונוכל להפעיל את האלגוריתם מהסעיף הקודם (**"גרף כללי $\Leftarrow$ מיון טופולוגי של גרף הרכיבים קשירים היטב"**), נשים לב שלכל הקדקודים ברכיב קשיר היטב אותו ערך של best.

האלגוריתם:
1. נבנה את G^{SCC} גרף הרכיבים קשירים היטב של G.
2. נאתחל את השדה rating של כל קדקוד C ב-G^{SCC} ל-rating המקסימאלי של קדקודי הרכיב המתאים ב-G: $\text{rating}(C)=\max\{\text{rating}(u): u\in C\}$.
3. נפעיל את האלגוריתם מסעיף א על G^{SCC}, כדי לקבל best(C) לכל רכיב C.
4. לכל רכיב C ולכל $u\in C$ נבצע best(u) $\leftarrow$ best(C).

הסבר על נכונות האלגוריתם:

נשים לב כי קבוצת הקדקודים שניתן להגיע אליהם מכל אחד מהקדקודים הנמצאים באותו רכיב קשיר היטב זהה (אם ניתן להגיע לקודקוד u מקודקוד x, אזי ניתן להגיע לקודקוד u מכל קודקוד y ברכיב של x ע"י שרשור המסלול מ-y ל-x והמסלול מ-x ל-u). לכן, ערכי ה-best של כל קדקודי רכיב קשיר היטב זהים, ומכיוון שב-G^{SCC} אין מעגלים ניתן להפעיל עליו את האלגוריתם מהסעיף הקודם.

אתחול שדות ה-rating של קדקודי G^{SCC} מבטיח את קבלת התוצאות הנכונות.

לסיכום: יש מסלול מקדקוד $u_1\in C_1$ לקדקוד $u_2\in C_2$ בגרף G אם"ם יש מסלול מ-C_1 ל-C_2 ב-G^{SCC}. לכן $\text{best}(u_1)=\text{best}(C_1)$.

ניתוח זמן ריצה:
1. בניית גרף הרכיבים קשרים היטב: $O(|V|+|E|)$.
2. ניתן לעדכן ב-$O(|V|)$ את שדות ה-rating ב-G^{SCC}.
3. הרצת האלגוריתם לגרף חסר מעגלים: $O(|V|+|E|)$ (נשים לב כי בגרף הרכיבים יש לכל היותר $|V|$ קודקודים ולכל היותר $|E|$ צלעות).
4. השמת הערכים עבור קודקודי G: $O(|V|)$.

סה"כ זמן ריצה: $O(|V|+|E|)$.