תרגול מס׳ 5 –אלגוריתם Dijkstra

Dijkstra

אלגוריתם Dijkstra – מוצא מסלולים זולים ביותר מקודקוד מקור לכל הקודקודים בגרף מכוון וממושקל במשקלות אי-שליליים.

זמן הריצה - $O(|E|+|V|\log|V|)$.

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE (G, s)
for each vertex v ∈ V[G] do
    d[v] ← ∞
    π[v] ← NIL
d[s] ← 0
```

```
RELAX (u, v, w)
if d[v] > d[u] + w(u, v) then
    d[v] ← d[u] + w(u, v)
    π[v] ← u
```

האלגוריתם משתמש בשדה $d[v]$ לצורך שמירת משקל המסלול הזול ביותר הנוכחי מהמקור לקודקוד v, וב-$\pi[v]$ לצורך שמירת הקודקוד ה"לפני אחרון" במסלול הזול ביותר הנוכחי (לצורך שחזור המסלול).

```
DIJKSTRA (G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S ← Ø
Q ← V[G]
while Q ≠ Ø do
    u ← EXTRACT-MIN (Q)
    S ← S ∪ {u}
    for each vertex v in Q such that v∈ Adj[u] do
        RELAX (u, v, w)
```

כמו כן, האלגוריתם משתמש בשתי רוטינות עזר. ברוטינה INITIALIZE-SINGLE-SOURCE, מאותחלים כל השדות ונקבע המרחק של s מ- s להיות 0. הרוטינה RELAX, בהינתן קודקודים u ו-v, נערכת בדיקה האם יותר קצר להגיע ל-v דרך u או לא.

← דוגמת ריצה של האלגוריתם

<u>בעיית צוואר הבקבוק</u>

<u>הגדרה</u>: יהי G גרף מכוון ממושקל, ויהי $P=\{v_0,v_1,...,v_k\}$ מסלול בגרף. **צוואר הבקבוק** של מסלול P הוא משקל הקשת המינימאלית ב- P, כלומר $bn(P)=\min\{w(v_i,v_{i+1}):0\le i\le k-1\}$.

עבור זוג קודקודים $s,u\in V$ נגדיר את $\beta(s,u)$ כגודל צוואר הבקבוק הגדול ביותר מבין צווארי הבקבוק של כל המסלולים המובילים מ-s ל-u, או $-\infty$ אם לא קיים מסלול כזה:

$$\beta(s,u)=\begin{cases}\infty & s=u\\ \max\left\{\{bn(P):P\text{ is a path from }s\text{ to }u\}\cup\{-\infty\}\right\} & \text{otherwise}\end{cases}.$$

<u>ניסוח הבעיה</u>:

מופע: נתון גרף ממושקל $G=(V,E,w)$, וקודקוד מקור s.

צריך למצוא: $\beta(s,u)$ לכל $u\in V$. (צוואר הבקבוק המקסימאלי של מסלול מ- s ל- u).

מוטיבציה: דמינו לעצמכם רשת כבישים כשבחלק מהכבישים (קשתות) יש הגבלת גובה בגלל גשרים (משקל הקשת). המטרה היא למצוא מה הגבלת הגובה בין נקודת התחלה (s) לכל נקודה אחרת ברשת הכבישים.

<u>האלגוריתם:</u>

```
BRelax (u, v, w)
1       if b[v] < min{b[u], w(u,v)}
2               b[v] ← min{b[u], w(u,v)}
```

```
BottleNeck (G, w, s)
1       for each vertex v ∈ V
2               b[v] ← (−∞)
4       b[s] ← ∞
5       S ← ∅
6       Q ← V
7       While Q ≠ ∅
8               u = EXTRACT-MAX (Q)
9               S ← S ∪ {u}
10              For each v in Q such that (u,v) ∈ E
11                      BRelax (u, v, w)
```

<u>הסבר לאלגוריתם:</u>

האלגוריתם משתמש בשדה $b[v]$ לצורך שמירת צוואר הבקבוק המקסימאלי הנוכחי של מסלול מהמקור לקודקוד v.

בכל שלב, האלגוריתם בוחר קודקוד u עם צוואר בקבוק מקסימאלי, ומעדכן את שכניו שעדיין ב-Q.

ברגע שצומת הוצא מ-Q, לא נעדכן אותו יותר (כלומר, ערכו לא ישתנה)

← דוגמת ריצה של האלגוריתם

<u>הוכחת נכונות האלגוריתם</u>

<u>טענה עיקרית</u>: לאחר הרצת BottleNeck(G, w, s) מתקיים $\beta(s,u)=b[u]$ עבור כל קודקוד $u \in V$.

ניעזר בטענות עזר הבאות:

<u>טענה 1</u>: עבור כל צלע (u, v) בגרף מתקיים $\beta(s,v) \ge \min\{\beta(s,u), w(u,v)\}$.

<u>טענה 2</u>: בכל שלב בריצת האלגוריתם, עבור כל קודקוד v, מתקיים: $b[v] \le \beta(s,v)$.

<u>אבחנה</u>: לאחר הוספת קודקוד v ל-S הערך $b[v]$ לא משתנה במהלך ריצת האלגוריתם. (בשורה 10 אנו מעדכנים רק v ב-Q)

<u>הוכחת הטענה העיקרית</u>:

נראה שעבור כל קודקוד $u \in V$, בעת הכנסתו ל- S מתקיים $b[u]=\beta(s,u)$. לפי האבחנה שוויון זה מתקיים עד סוף ריצת האלגוריתם.

ישנם שלושה מקרים:

1. $u=s$:

במקרה זה s מוכנס ראשון ל- S, כאשר $b[s]=\beta(s,s)=\infty$ לפי הגדרה.

2. **אין מסלול בגרף מ- s ל- u**:
במקרה זה $\beta(s,u) = (-\infty)$. לפי טענה 2 בכל שלב באלגוריתם מתקיים $b[u] \leq \beta(s,u)$,
ולכן עד סוף ה אלגוריתם מתקיים $b[u] \leq -\infty$ ולכן $b[u] = -\infty$.

3. **ישנו מסלול בגרף מ- s ל- u ו- $u \neq s$**:
נוכיח באינדיקציה על סדר הוצאת הצמתים ל-Q.
נניח שמתקיים עבור כל הצמתים שהוכנסו לפני u ונוכיח עבור u.
לפי טענה 2:

$$b[u] \leq \beta(s,u) \quad [1]$$

יהי P מסלול מ- s ל- u המקיים $bn(P) = \beta(s,u)$. כאשר מוסיפים את u ל- S, קודקוד המקור s כבר ב- S ולכן קיימת צלע $(x,y) \in P$ ש- $x \in S$ ו- $y \notin S$, ברגע הכנסת u (ראה תרשים). כיוון שבחרנו ב- u ולא ב- y מתקיים

$$b[u] \geq b[y] \quad [2]$$

כמו כן, כיוון ש- x כבר ב- S, ע"פ הנחת האינדוקציה $b[x] = \beta(s,x)$. כבר ביצענו את BRelax על הצלעות היוצאות מ- x, אזי:

$$b[y] \geq \min\{\beta(s,x), w(x,y)\} \quad [3]$$

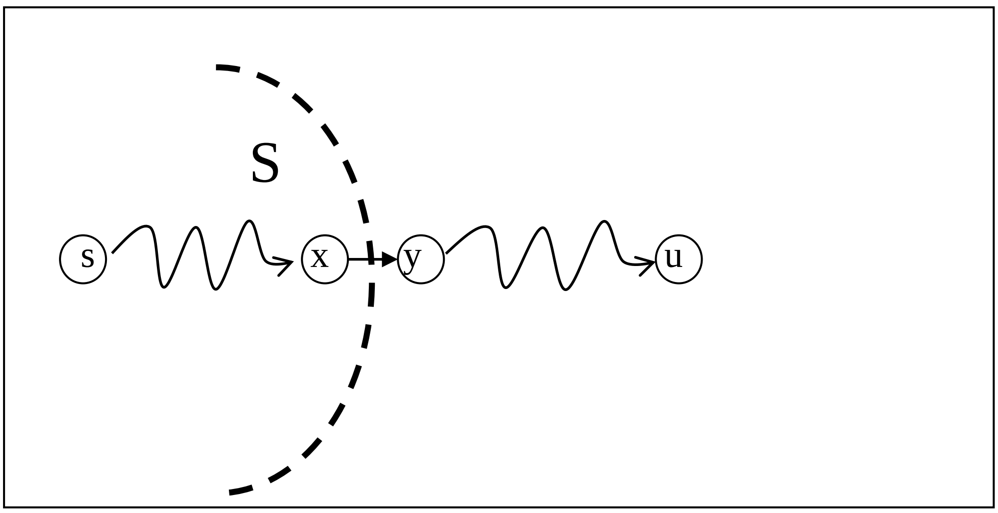
מסלול P עובר דרך הצלע (x,y) ולכן,

$$\beta(s,u) = bn(P) \leq \min\{\beta(s,x), w(x,y)\} \quad [4]$$

אם נשלב את כל האי-שוויונות נקבל:

$$b[u] \underset{[1]}{\leq} \beta(s,u) \underset{[4]}{\leq} \min\{\beta(s,x), w(x,y)\} \underset{[3]}{\leq} b[y] \quad [5]$$

מ-[2] ומ- [5] נקבל $b[u] = b[y]$. לכן, עפ"י [5] $b[u] = \beta(s,u)$ בעת הכנסתו ל-S. לפי האבחנה, ערך זה לא משתנה בהמשך. נכונות האלגוריתם נובעת מכך שכל הקודקודים מוכנסים בסוף ל- S.



<u>הוכחת טענה 1</u>:
אחד המסלולים האפשריים אל v הוא המסלול בעל צוואר הבקבוק הגדול ביותר אל u, משורשר עם הצלע (u,v). צוואר הבקבוק של מסלול זה הוא $\min\{\beta(s,u), w(u,v)\}$. לכן
$\beta(s,v) \geq \min\{\beta(s,u), w(u,v)\}$.

<u>הוכחת טענה 2</u>:

אם $b[v] = -\infty$, אזי בהכרח $\beta(s,v) \geq b[v]$.
אחרת, נראה באינדוקציה על מספר האיטרציות, שלכל קודקוד $v \in V$, כך ש-$b[v] > -\infty$, קיים מסלול מ- s ל- v בעל צוואר בקבוק $b[v]$.

בסיס: לאחר 0 איטרציות, s הוא הקודקוד היחיד המקיים $b[s] > -\infty$. עבור כל הקודקודים $v \neq s$ מתקיים $b[v] = -\infty$ ו- $b[s] = \infty$. לפי הגדרה $b[s] = \beta(s,s) = \infty$.

נניח כי טענת האינדוקציה נכונה לאחר k איטרציות, ונראה כי היא נכונה גם לאחר $k+1$ איטרציות.

יהי v קודקוד כך שלאחר k איטרציות מתקיים $b[v] > -\infty$. אם $b[v]$ לא השתנה במהלך האיטרציה ה- $k+1$, אזי מהנחת האינדוקציה קיים מסלול מ-s ל-v בעל צוואר בקבוק $b[v]$.
אחרת, $b[v]$ השתנה באיטרציה ה- $k+1$, כלומר קיים קודקוד u כך ש-$b[v]$ שונה במהלך הפעלת BRelax (u, v, w) באיטרציה זו ע"י השורה: $b[v] \leftarrow \min\{b[u], w(u,v)\}$.
כיוון ש-$b[u]$ לא השתנה באיטרציה זו, ניתן להסיק מהנחת האינדוקציה כי קיים מסלול מ- s ל- u כך שצוואר הבקבוק שלו הוא $b[u]$. שרשור הצלע (u,v) למסלול זה יוצרת מסלול מ-s ל-v שצוואר הבקבוק שלו הוא $\min\{b[u], w(u,v)\}$, ולכן $b[v]$ מקבל ערך של צוואר בקבוק של מסלול מ-s ל-v.

<u>הוכחה אלטרנטיבית לטענה 2</u>:
נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה, ויהי v הקודקוד הראשון המקיים $\beta(s,v) < b[v]$. נסתכל על פעולת ה-BRelax מקודקוד u, אשר אחריה קיבלנו $\beta(s,v) < b[v]$. בפעולה זו נקבל $\beta(s,v) < \min\{b[u], w(u,v)\} = b[v]$. כיוון ש- v הוא הקודקוד הראשון המפר את הטענה, בשלב זה מתקיים $\beta(s,u) \geq b[u]$ ולכן,

$$\min\{\beta(s,u), w(u,v)\} \geq \min\{b[u], w(u,v)\} = b[v] > \beta(s,v)$$

$$\geq \min\{\beta(s,u), w(u,v)\}$$

מוזזוה 1

סתירה.