1. אינטגרל האנרגיה ויחידות הפיתרון

באמצעות שיטת אינטגרל האנרגיה הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיות :

1_1. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \quad 0 \le x \le L, t > 0$, $\begin{cases} u(0,t) = a(t) \\ u(L,t) = b(t) \end{cases} t \ge 0$, $\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = p(x) \end{cases}, 0 \le x \le L$

1_2. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \quad 0 \le x \le L, t > 0$, $\begin{cases} u_x(0,t) = t^2, \\ u(L,t) = -t, \end{cases} t \ge 0$, $\begin{cases} u(x,0) = x^2 - L^2, \\ u_t(x,0) = \sin^2 \dfrac{\pi x}{2} \end{cases}, 0 \le x \le L$

1_3. $u_t - c u_{xx} = F(x,t)$, $\quad 0 \le x \le L, t > 0$, $\begin{cases} u(0,t) - \mu u_x(0,t) = a(t) \\ u(L,t) + \lambda u_x(L,t) = b(t) \\ t \ge 0, \quad \mu, \lambda > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ 0 \le x \le L \end{cases}$

1_4. $u_t = c u_{xx} - k^2 u + F(x,t)$, $\quad 0 \le x \le L, t > 0$, $\begin{cases} u(0,t) = a(t) \\ u(L,t) = b(t) \end{cases} t \ge 0$, $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ 0 \le x \le L \end{cases}$

1_4. נתונה בעיית הטלגרף הבאה

$$u_{tt} + k u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 \le x \le L, t > 0 , \begin{cases} u_x(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0, \end{cases} t \ge 0 , \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = p(x) \end{cases}, 0 \le x \le L$$

בעזרת אינטגרל האנרגיה הוכיחו את יחידות הפתרון לבעיה.

2. פתור בעיות שפה – התחלה בחצי הציר ($0 < x < \infty$) :

$$2\_1) u_{tt} = u_{xx} , t > 0 , 0 < x < \infty , \quad u(x,0) = 0 , \quad u_t(x,0) = 1, \quad u(0,t) = 0$$

$$2\_2) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ t > 0 , 0 < x < \infty \end{cases}, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1 , & x \in (1,2) \\ 0 & , x \in (0,1) \cup (2,\infty) \end{cases}, u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0$$

$$2\_3) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ t > 0 , 0 < x < \infty \end{cases}, \quad u(x,0) = 0 , u_t(x,0) = \begin{cases} 1 , & x \in (1,2) \\ 0 & , x \in (0,1) \cup (2,\infty) \end{cases}, \quad u(0,t) = 0$$

$$2\_4) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ t > 0 , 0 < x < \infty \end{cases}, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1 , & x \in (0,1) \\ 0 & , x \in (1,\infty) \end{cases}, u_t(x,0) = e^{-x}, \quad u(0,t) = 0$$

$$2\_5) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ t > 0 , 0 < x < \infty \end{cases}, \quad u(x,0) = \begin{cases} 2 , & x \in (0,2) \\ 0 & , x \in (2,\infty) \end{cases}, u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty u(x,t) dx \right) = ?$$

<u>3 עקרון דוהאמל</u>

3_1 .

א . הוכיחו את עקרון דוהאמל : עבור $\tau \ge 0$ יהי $v(x,t,\tau)$ הפתרון של בעיה התחלה (התלויה בפרמטר τ)

$$\begin{aligned} &v_t - v_{xx} = 0 && 0<x<L,\ t>\tau, \\ &v(0,t,\tau) = v(L,t,\tau) = 0 && t \ge \tau, \\ &v(x,\tau,\tau) = F(x,\tau) && 0 \le x \le L. \end{aligned}$$

הוכיחו כי הפונקציה $u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau$ פותרת את הבעיה

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = F(x,t) && 0<x<L,\ t>0, \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0 && t \ge 0, \\ &u(x,0) = 0 && 0 \le x \le L. \end{aligned}$$

ב .פתרו את הבעיה בעזרת עקרון דוהאמל

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2t\sin x \quad 0<x<\pi, \quad t>0 \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = 0 \end{aligned}$$

3_2 . הוכיחו את עקרון דוהאמל : עבור $\tau \ge 0$ יהי $v(x,t,\tau)$ הפתרון של בעיה התחלה (התלויה בפרמטר τ)

$$\begin{aligned} &v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0 \\ &v(x,\tau,\tau) = 0, \quad v_t(x,\tau,\tau) = F(x,\tau) \end{aligned}$$

הוכיחו כי הפונקציה $u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau$ פותרת את הבעיה

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t) \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0 \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

מצא פתרונות לבעיות הבאות :

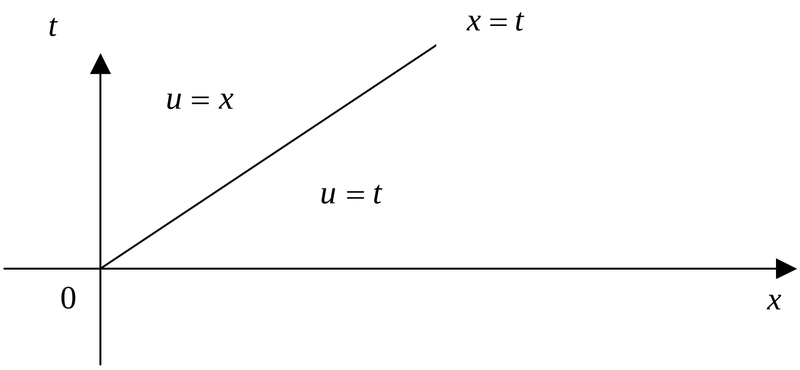
3_3
$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + \cos x + \sin t \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0 \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

3_4
$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} - x \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0 \\ &u(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \in (-\infty,0)\cup(1,\infty) \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

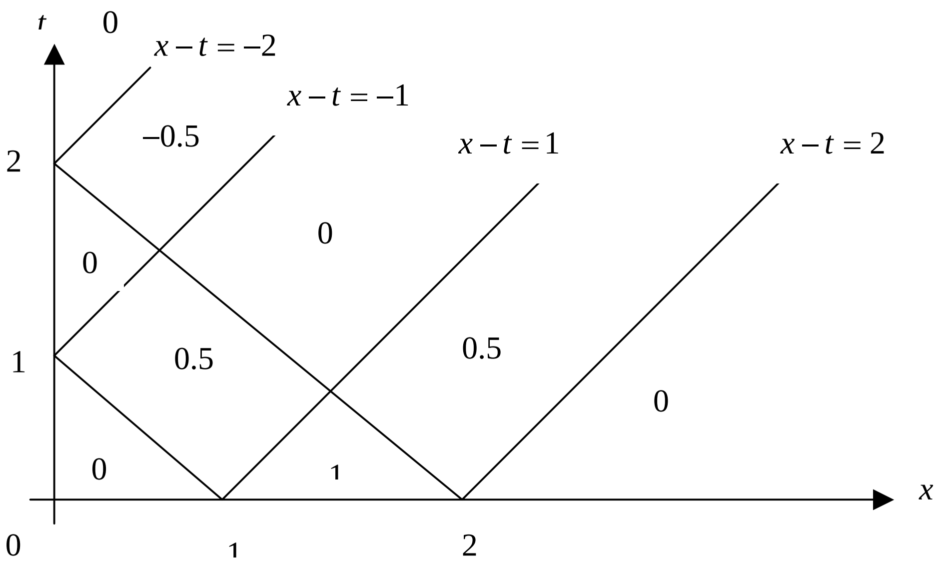
3_5
$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + 16xt \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0 \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

תשובות:

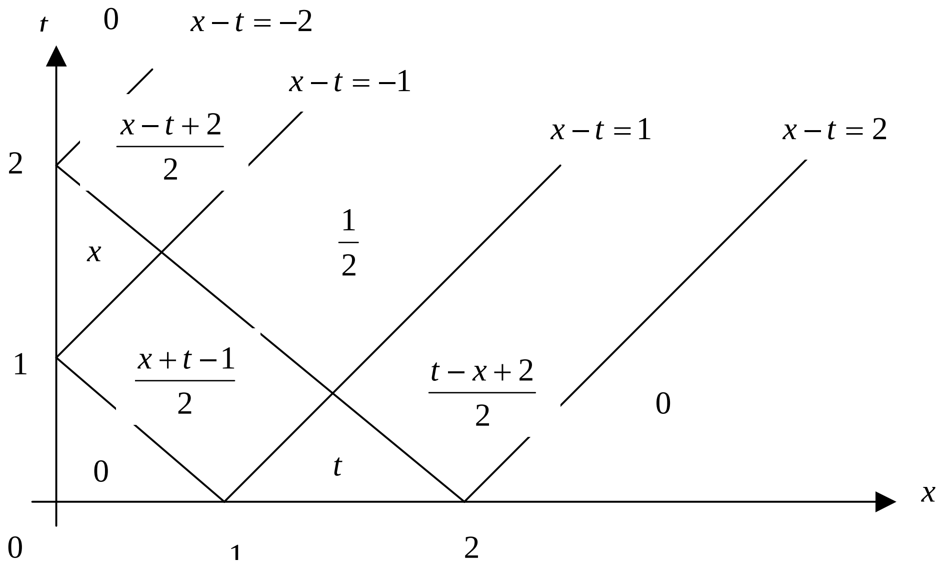
2_1



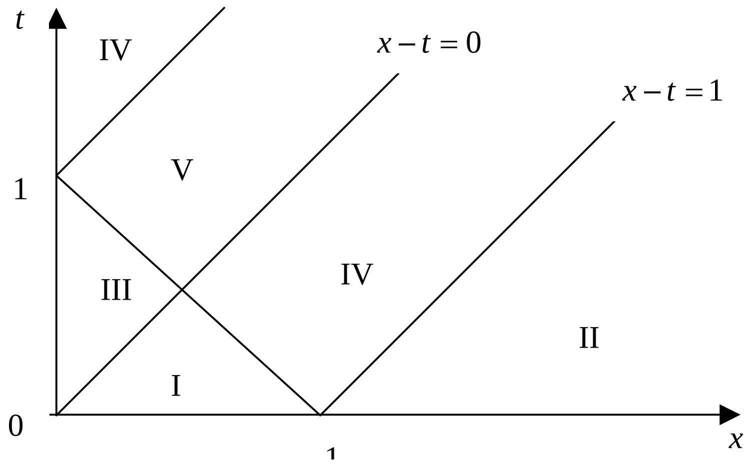
2_2



2_3



2_4



u(x,t)

I. $1+0.5e^{-x-t}(e^{2t}-1)$

II. $0.5e^{-x-t}(e^{2t}-1)$

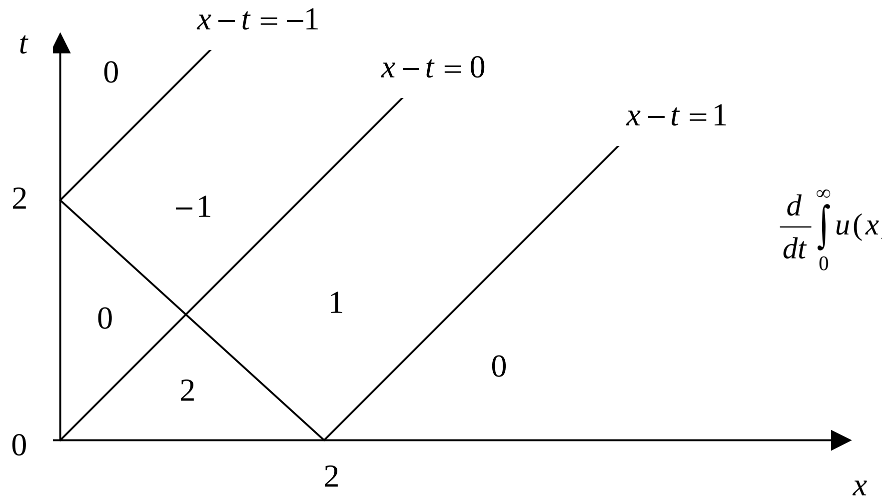
III. $0.5e^{-x-t}(e^{2x}-1)$

IV. $0.5+0.5e^{-x-t}(e^{2t}-1)$

V. $-0.5+0.5e^{-x-t}(e^{2x}-1)$

VI. $0.5e^{-x-t}(e^{2x}-1)$

2_5

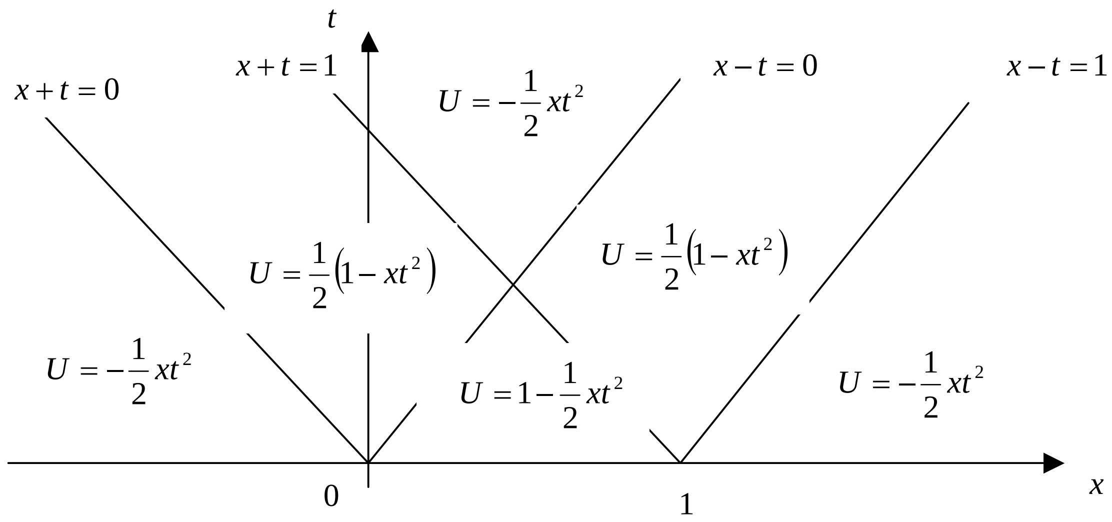


$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty u(x,t)\,dx = \begin{cases} -2, t<2 \\ 0, t>2 \end{cases}$$

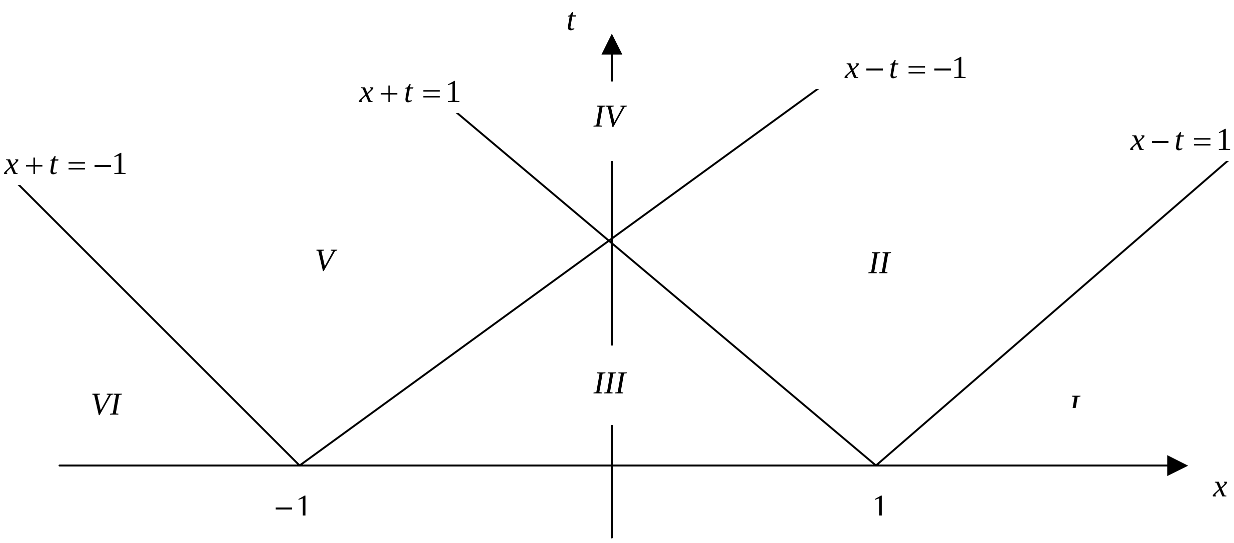
$$3\_1)\quad u(x,t)=2(e^{-t}+t-1)\sin x$$

$$3\_3)\quad u(x,t)=-\cos x\cos t+t+\cos x-\sin t$$

3_4



3_5



$$\mathrm{I}:u(x,t)=\frac{8xt^3}{3}\qquad \mathrm{II}:u(x,t)=\frac{8xt^3}{3}+\frac{t-x}{2}+1$$

$$\mathrm{III}:u(x,t)=\frac{8xt^3}{3}+t+1\qquad \mathrm{IV}:u(x,t)=\frac{8xt^3}{3}+1$$

$$\mathrm{V}:u(x,t)=\frac{8xt^3}{3}+\frac{t+x}{2}+1\qquad \mathrm{VI}:u(x,t)=\frac{8xt^3}{3}$$