משוואות דיפרנציאליות ליניאריות מסדר שני

I . משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים $ay''+by'+cy=0$ $(a,b,c\in R)$

משוואה אופיינית $ar^2+br+c=0$

$$1)\ r_1,r_2\in R\quad ,r_1\neq r_2\Rightarrow y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$
$$2)\ r_1,r_2\in R\quad ,r_1=r_2=r\Rightarrow y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$$
$$3)\ \alpha,\beta\in R, r_{1,2}=\alpha\pm\beta i\Rightarrow y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

דוגמה 1 פתור : $y''+4y'=0$

$$y''+4y'=0\Rightarrow r^2+4r=0\Rightarrow r_1=0,r_2=-4\Rightarrow y_1=e^{0\cdot x}=1,y_2=e^{-4x}\Rightarrow y=C_1+C_2e^{-4x}$$

דוגמה 2 פתור : $y''+4y'+4y=0$

$$y''+4y'+4y=0\Rightarrow r^2+4r+4=0\Rightarrow r_{1,2}=-2\Rightarrow y_1=e^{-2x},y_2=xe^{-2x}\Rightarrow y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$$

דוגמה 3 פתור : $y''+4y'+13y=0$

$$y''+4y'+13y=0\Rightarrow r^2+4r+13=0\Rightarrow r_{1,2}=-2\pm3i\Rightarrow\alpha=-2,\beta=3\Rightarrow$$
$$y_1=e^{-2x}\cos3x,y_2=e^{-2x}\sin3x\Rightarrow y=e^{-2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$$

II .משוואות ליניאריות לא הומוגניות $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$

שיטת הוריאציה :

נניח ש- $y=C_1y_1+C_2y_2$ פתרון כללי למשוואה $y''+p(x)y'+g(x)y=0$ אזי פתרון כללי למשוואה $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$ נחפש בצורה $y=M(x)y_1+N(x)y_2$ כאשר הפונקציות $M(x),N(x)$ ניתן לקבל מהמערכת

$$\left.\begin{aligned}M'y_1+N'y_2&=0\\M'y_1'+N'y_2'&=f(x)\end{aligned}\right\}$$

III. משוואות ליניאריות לא הומוגניות $ay''+by'+cy=f(x)$

שיטת השוואת המקדמים.

אם

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_k(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\right),$$
$$P_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k,\quad Q_l(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_l$$

אזי נחפש פתרון פרטי למשוואה לא הומוגניות בצורה :

$$y_p(x)=e^{\alpha x}\left[(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)\cos\beta x+(B_0x^n+B_1x^{n-1}+\cdots+B_n)\sin\beta x\right]x^S$$
$$n=\max(k,l)$$

S הוא ריבוי של שורש $(\alpha+\beta i)$ למשוואה אופיינית $ar^2+br+c=0$

$$1)\ \left.\begin{matrix}\alpha=0,\beta=0\\ \alpha+\beta i=0\end{matrix}\right\},\ f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\Rightarrow y_p=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)\,x^S$$

$$2)\ \left.\begin{matrix}\beta=0\\ \alpha+\beta i=\alpha\end{matrix}\right\},\ f(x)=e^{\alpha x}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\Rightarrow y_p=e^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)\,x^S$$

$$3)\ \left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \alpha+\beta i=\beta i\end{matrix}\right\},\ f(x)=P_k(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\Rightarrow y_p=(M_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x)\,x^S$$

<u>דוגמה</u> 4 $y''+3y'=e^{-3x}(8x\cos 4x+7\sin 4x)$

$$f(x)=e^{-3x}(8x\cos 4x+7\sin 4x)\Rightarrow \left.\begin{matrix}r_1=0,\ r_2=-3,\\ \alpha+\beta i=-3+4i\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=0,$$

$$n=1,\qquad y_p=e^{-3x}((Ax+B)\cos 4x+(Mx+D)\sin 4x)$$

<u>דוגמה</u> 5 $y''+2y'+2y=3e^{-x}\cos x$

$$f(x)=3e^{-x}\cos x\Rightarrow \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}r_{1,2}=-1\pm i,\\ \alpha+\beta i=-1+i\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=1\\ n=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad y_p=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)x$$

<u>דוגמה</u> 6 $y'''+9y'=8x+x^2e^{-x}-1$

$$f(x)=8x-x^2e^{-x}-1\Rightarrow f(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad f_1(x)=8x-1,\quad f_2(x)=-x^2e^{-x}$$

$$y_p=y_{1p}+y_{2p}$$

$$f_1(x)=8x-1\Rightarrow \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}r_1=0,\ r_{2,3}=\pm 3i,\\ \alpha+\beta i=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=1\\ n=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad y_{1p}=(Ax+B)x$$

$$f_2(x)=-x^2e^{-3x}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}r_1=0,\ r_{2,3}=\pm 3i,\\ \alpha+\beta i=-3\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=0\\ n=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad y_{2p}=(Mx^2+Nx+D)e^{-3x}$$

<u>תרגילים</u>

I . פתור את המשוואות

1) $2y''+5y'-3y=0$

2) $y''-8y'+16y=0\ ,\ y(0)=1,\ y'(0)=3$

3) $y''+2y'+5y=0$

4) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}=0$

5) $\dfrac{d^2s}{dt^2}+9s=0\ ,\ s(0)=2\ ,\ s'(0)=1$

6) $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}+10\dfrac{dr}{d\varphi}+25r=0$

II . פתור את המשוואות

1) $y''+y=4xe^{x}$

2) $y''-5y'=3x^{2}+\sin 5x$

3) $y''+2y'+y=xe^{-x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

4) $y''+4y=5\cos 2t$

5) $y''-9y=12e^{3t}-6\sin 3t$

6) $xy''-2xy'+xy=e^{x}$

7) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

תשובות :

I .

1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{0.5x}$

2) $y=e^{4x}(1-x)$

3) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

4) $x=C_1+C_2e^{4t}$

5) $s=2\cos 3t+\dfrac{1}{3}\sin 3t$

6) $r=(C_1+C_2\varphi)e^{-5\varphi}$

II.

1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^{x}$

2) $y=C_1+C_2e^{5x}-0.2x^{3}-0.12x^{2}-0.048x+0.02(\cos 5x-\sin 5x)$

3) $y=e^{-x}\left(1+x+\dfrac{x^{3}}{6}\right)$

4) $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+1.25t\sin 2t$

5) $=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}+2te^{3t}+\dfrac{1}{3}\sin 3t$

6) $y=e^{x}(x\ln|x|+C_1+C_2x)$

7) $y=(-x+C_1)\cos x+(\ln|\sin x|+C_2)\sin x$